

**UNIVERSIDAD DE ALICANTE**

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES**



**GRADO EN ECONOMÍA**

*CURSO ACADÉMICO 2019 - 2020*

Modelización de series financieras y estudio de su volatilidad

María Gertrudis Fernández Maciá

Alfonsa Denia Cuesta

*Fundamentos del Análisis Económico*

Alicante, Junio 2020

## Resumen

El objetivo del trabajo es estudiar el comportamiento de series temporales financieras para poder tomar decisiones de inversión. Las series se modelizan mediante modelos ARMA considerando los valores atípicos antes de pasar a un análisis de su volatilidad, que se estima con modelos de la familia GARCH. Este análisis permite calcular medidas de riesgo como el Value at Risk o la construcción de una cartera de mínima varianza global.

Los resultados destacan la importancia de comprobar la influencia de valores atípicos y de modelizar correctamente la varianza condicional, que es mejor estimarla con modelos EGARCH que consideran la asimetría de los shocks, para poder calcular medidas de riesgo más precisas y dinámicas.

Palabras clave: Series temporales, Rentabilidades, Modelos ARMA, Volatilidad, Heterocedasticidad condicional, EWMA, GARCH, Asimetría, Value at Risk, Cartera de mínima varianza global.

## Abstract

The objective of this paper is to study the behaviour of financial time series to be able to take investment decisions. The series are modeled with ARMA models considering outliers before focusing on the analysis of their volatility, which is estimated with GARCH family models. This analysis is useful to calculate risk measures such as Value at Risk or a portfolio of minimum global variance.

The results show the importance of considering the influence of outliers in the models and to modelize properly the conditional variance of the series, which is better estimated with EGARCH models that take into consideration the asymmetry of the shocks, in order to calculate dynamic risk measures more precisely.

Key words: Time series, Returns, ARMA models, Volatility, Conditional heteroscedasticity, EWMA, GARCH, Asymmetry, Value at Risk, Portfolio allocation.

# Índice

1.	Introducción .....	2
1.1.	Descripción de los datos.....	3
1.2.	Visualización de las series .....	4
1.3.	Estadísticos principales .....	7
1.4.	Contraste de normalidad .....	9
2.	Estabilidad de la media y la varianza de la serie .....	12
2.1.	Análisis de la estacionariedad en varianza.....	12
2.2.	Análisis de la estacionariedad en media .....	13
3.	Modelización .....	14
3.1.	Valores atípicos .....	20
4.	Volatilidad .....	28
4.1.	Presencia de heterocedasticidad condicional.....	29
4.2.	Modelización clásica de la volatilidad: EWMA.....	35
4.3.	Modelización GARCH y variantes .....	37
5.	Value at Risk .....	47
6.	Cartera de mínima varianza global.....	49
7.	Conclusiones.....	52
8.	Anexo.....	53
8.1.	Análisis de la estacionariedad en media .....	53
8.2.	Modelización .....	53
8.3.	Valores atípicos .....	64
8.4.	Volatilidad .....	71
8.5.	Cartera de mínima varianza global.....	78
9.	Bibliografía .....	80

## 1. Introducción

En el presente trabajo se va a analizar detalladamente el comportamiento de varias series financieras con el objetivo de tener un mayor conocimiento de las mismas para tomar mejores decisiones de inversión. También se va a analizar una cartera equiponderada formada por todas las series.

Las series financieras del análisis son en concreto series de rentabilidades de acciones que cotizan en el índice bursátil estadounidense S&P 500. En la primera sección se va a comenzar con un análisis descriptivo de los datos para tener una primera idea de lo que se puede esperar de las series. En la segunda sección se va a comprobar la estacionariedad en media y en varianza de las series, condiciones necesarias para poder buscar los modelos ARIMA que mejor se ajustan a su comportamiento. En la tercera sección se presentan los modelos que mejor recogen la dinámica de cada serie. Primero se propone un modelo para cada serie en el que los retardos son significativos, se minimizan criterios de información (Akaike, Schwarz y Hanna-Quinn) y el correlograma de los residuos es el más parecido a un ruido blanco (Box et al, 1994). Después se comprueba la existencia de valores atípicos que hayan podido influir en el comportamiento de las series, y si los hay se incluyen en el modelo. Se vuelven a buscar los modelos con el mejor ajuste teniendo en cuenta los valores atípicos. Ya con las series modelizadas se profundiza en una característica muy habitual en series financieras: la volatilidad. La volatilidad es una medida de la variabilidad de una serie respecto a su media. En este caso se trata de lo que varía la rentabilidad de una serie de acciones respecto a su rendimiento medio, con lo que se asocia la volatilidad al riesgo de inversión. En la cuarta sección empieza el análisis detallado de la volatilidad. Primero se contrasta la presencia de volatilidad en las series (Engle, 1982). Aquellas series que presentan volatilidad tienen varianza condicional que cambia con el tiempo, por lo que interesa ver qué estructura tiene esa varianza condicional para poder estimarla. La modelización se realiza desde dos enfoques: el clásico que consiste en una estimación mediante EWMA, y el moderno que consiste en una estimación mediante modelos de la familia GARCH (Bollerslev, 1986). Concretamente se estiman modelos GARCH porque en general dan una buena estimación de la volatilidad, pero también se consideran los

modelos GJR y EGARCH porque tratan la asimetría de los shocks que sufren las series (Glosten et al., 1993) (Nelson, 1991). Tras el estudio de la volatilidad se presentan dos aplicaciones financieras en las que resulta muy útil conocer el comportamiento de la varianza condicional. En la quinta sección se presenta el cálculo del Value at Risk y en la sexta sección se construyen carteras de mínima varianza global, que son las que minimizan el riesgo al invertir. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo en la séptima sección.

Al final del trabajo hay un anexo en el que se incluye información complementaria del análisis realizado. Todos los cálculos y estimaciones de modelos se han realizado con el programa estadístico Gretl.

### 1.1. Descripción de los datos

Para este estudio se han elegido tres series del precio de las acciones de empresas estadounidenses que cotizan en bolsa, que se transforman para obtener las rentabilidades correspondientes.

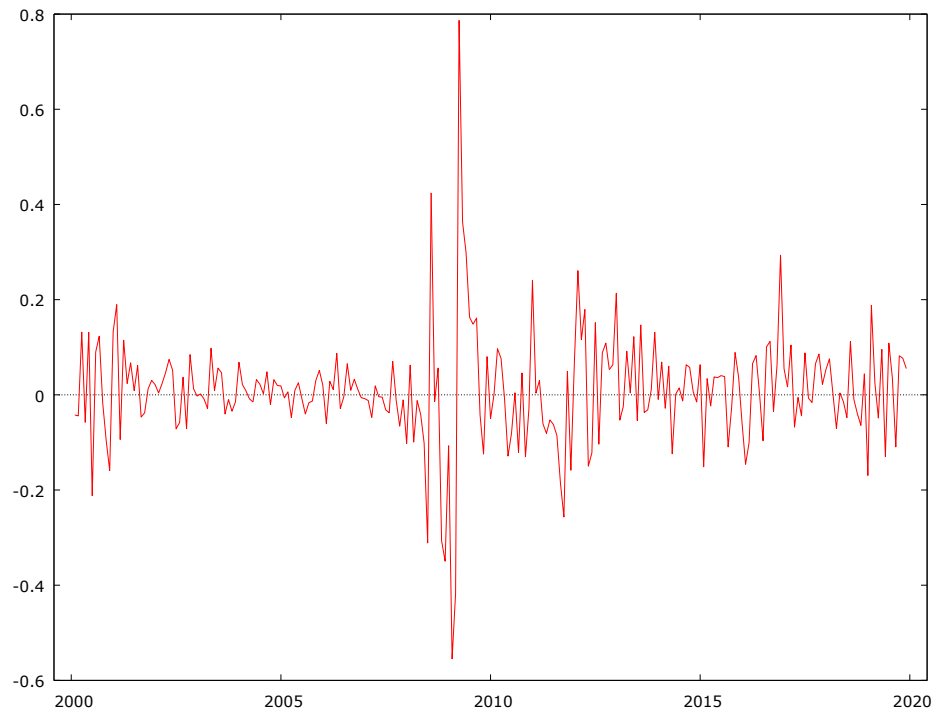
Una de las series elegidas es del Bank of America, el segundo mayor banco de Estados Unidos, otra es de ExxonMobil Corporation, una petrolera estadounidense, y la tercera es la de Adobe Systems Incorporated, una empresa de desarrollo de software. Se han elegido series de diferentes sectores (financiero, energético y tecnológico) para formar una cartera equiponderada que no se vea muy afectada por perturbaciones que afecten a uno de esos sectores.

En los tres casos se ha obtenido el precio al que han cotizado las acciones en los últimos 20 años y con frecuencia mensual, es decir desde el 1 de enero del 2000 hasta el 1 de diciembre del 2019, 239 observaciones en total. Los datos se han obtenido de Yahoo Finance.

Para calcular la rentabilidad de las acciones, se hace la transformación  $(Y_t - Y_{t-1}) / Y_{t-1}$  donde  $Y_t$  es la serie del precio de las acciones.

## 1.2. Visualización de las series

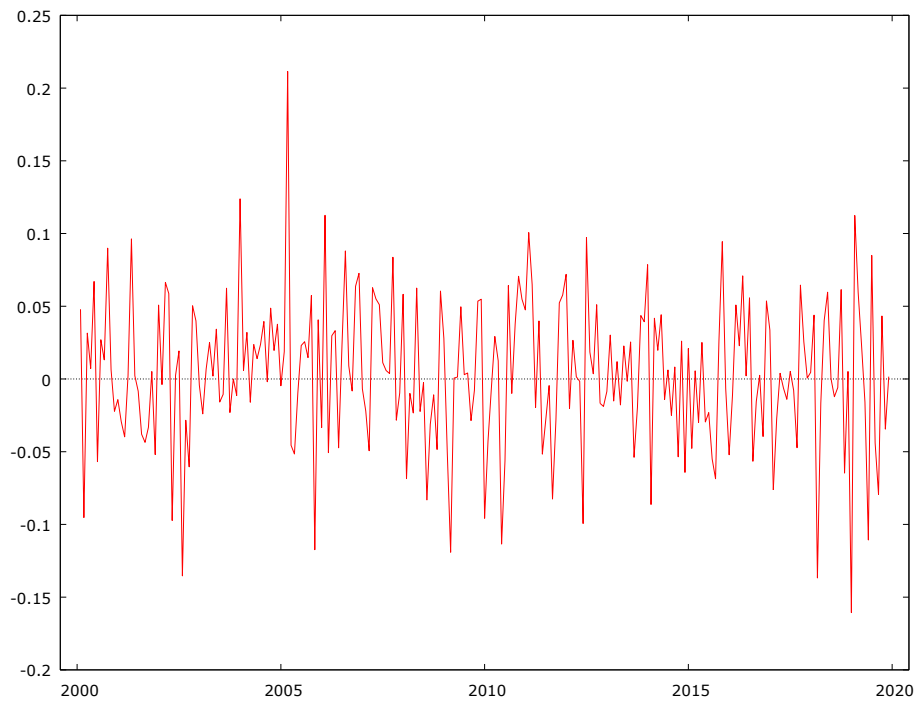
El gráfico de la serie de rentabilidades del Bank of America es el siguiente:



*Gráfico 1: Rentabilidades mensuales de Bank of America. Elaboración propia.*

El rasgo más destacable de la serie es que oscila alrededor del cero, por lo que la media seguramente se acerque a ese valor. Al tratarse de rentabilidades, este rasgo es esperable en todas las series. Pero las oscilaciones no son muy grandes, así que podemos esperar que la varianza de la serie sea pequeña. No obstante, se observa un período entre el 2008 y el 2010 en el que la serie varía mucho, alcanzando valores máximos y mínimos muy por encima del resto de observaciones de la serie. Como se trata de la rentabilidad de las acciones de un banco estadounidense, esa variabilidad estará relacionada con la crisis financiera que empezó en Estados Unidos en el 2008.

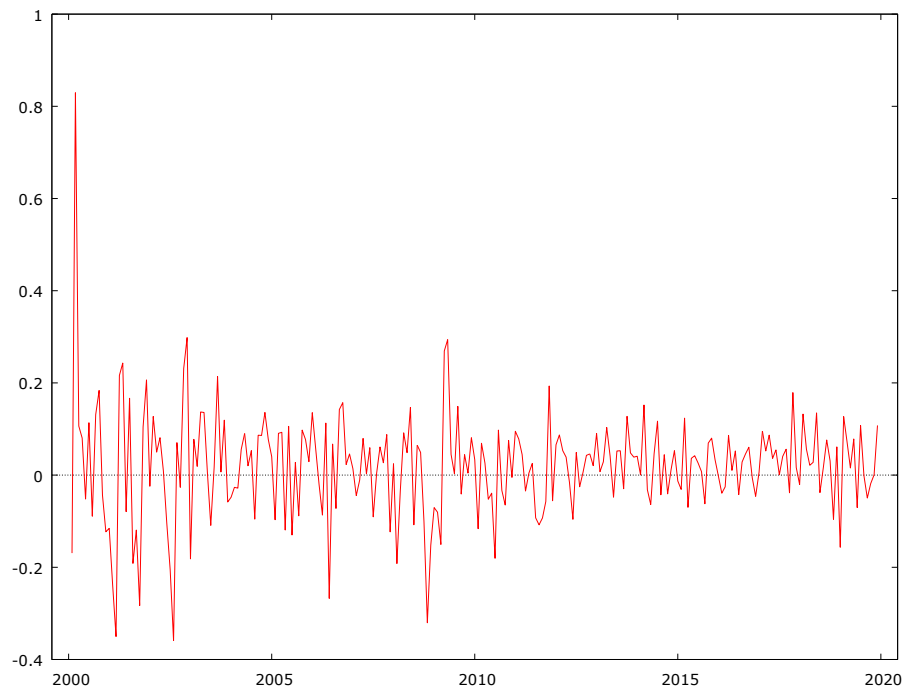
El gráfico de la serie de rentabilidades de ExxonMobil es el siguiente:



*Gráfico 2: Rentabilidades mensuales de ExxonMobil. Elaboración propia.*

Esta serie también oscila alrededor del cero, como es de esperar por ser rentabilidades. La serie tiene un rango de variación menor que la del Bank of America, aunque también se observan algunos picos, como en el 2005.

El gráfico de la serie de rentabilidades de Adobe Systems es el siguiente:



*Gráfico 3: Rentabilidades mensuales de Adobe Systems. Elaboración propia.*

En la serie de Adobe Systems se observa más variabilidad al principio que en cualquier otro tramo. Esto probablemente se deba a que en los primeros años de la década del 2000 las empresas tecnológicas relacionadas con internet estaban aumentando su valor en bolsa muy rápidamente, pero en el año 2002 su valor bajó considerablemente (se trata de la burbuja de las punto-com).

El gráfico de la cartera equiponderada es el siguiente:





Gráfico 4: Rentabilidad de la cartera equiponderada. Elaboración propia.

### 1.3. Estadísticos principales

Los estadísticos principales de las series son los siguientes:

#### Bank of America

Media	Mediana	Mínimo	Máximo
0.0084202	0.0041899	-0.55460	0.78670
Desv. Típica.	C.V.	Asimetría	Exc. de curtosis
0.11909	14.143	0.66035	10.240
Porc. 5%	Porc. 95%	Rango IQ	Observaciones ausentes
-0.15120	0.16301	0.10417	1

Tabla 1: Estadísticos principales de Bank of America. Elaboración propia.

## ExxonMobil

Media	Mediana	Mínimo	Máximo
0.0035770	0.0025062	-0.16064	0.21143
Desv. Típica.	C.V.	Asimetría	Exc. de curtosis
0.050937	14.240	-0.094901	1.1290
Porc. 5%	Porc. 95%	Rango IQ	Observaciones ausentes
-0.086282	0.083695	0.063524	1

Tabla 2: Estadísticos principales de ExxonMobil Corporation. Elaboración propia.

## Adobe Systems

Media	Mediana	Mínimo	Máximo
0.018692	0.027488	-0.35897	0.82942
Desv. Típica.	C.V.	Asimetría	Exc. de curtosis
0.11558	6.1834	0.98604	10.132
Porc. 5%	Porc. 95%	Rango IQ	Observaciones ausentes
-0.16914	0.17892	0.11959	1

Tabla 3: Estadísticos principales de Adobe Systems Incorporated. Elaboración propia.

## Cartera equiponderada

Media	Mediana	Mínimo	Máximo
0.0081083	0.012071	-0.17840	0.12848
Desv. Típica.	C.V.	Asimetría	Exc. de curtosis
0.051086	6.3004	-0.64803	1.0334
Porc. 5%	Porc. 95%	Rango IQ	Observaciones ausentes
-0.093369	0.087155	0.058825	1

Tabla 4: Estadísticos principales de la Cartera equiponderada. Elaboración propia.

Como se observaba en los gráficos, la media de las series es muy cercana a cero y la desviación típica es más grande para Bank of America y Adobe Systems. En la Cartera la desviación típica es de 0.051 y el coeficiente de variación de 6.3, comparándolo con el de las tres series se puede decir que se ha logrado diversificar el riesgo.

El coeficiente de asimetría indica dónde se agrupan las observaciones respecto de la media: un coeficiente de asimetría positivo indica que la mayoría se encuentran por encima de la media de la serie, mientras que un coeficiente negativo indica lo contrario. El coeficiente de curtosis indica el grado de acumulación de las observaciones centrales, es decir, si la serie está más aplanada en el centro (platicúrtica), si es más puntiaguda (leptocúrtica), o si se parece a una distribución normal (mesocúrtica). En una serie con distribución normal no debería existir asimetría ni exceso de curtosis.

Las series de Bank of America y Adobe Systems tienen asimetría positiva y son leptocúrticas. La serie de ExxonMobil tiene coeficientes más cercanos a los de una distribución normal. Estos valores sirven para obtener una primera intuición de las series, pero para saber si siguen una distribución normal es necesario realizar un contraste.

#### 1.4. Contraste de normalidad

Se puede ver gráficamente si las series siguen una distribución normal comparando su distribución de frecuencias con la forma de la normal. A continuación se muestran los histogramas de las series y la función de densidad de la normal.

##### Bank of America

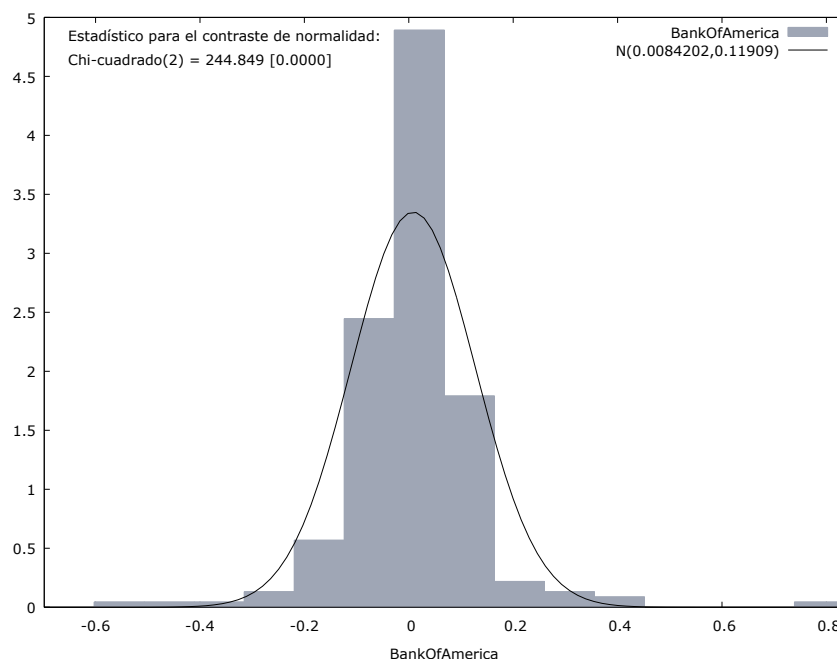


Gráfico 5: Histograma de Bank of America. Elaboración propia.

**ExxonMobil**

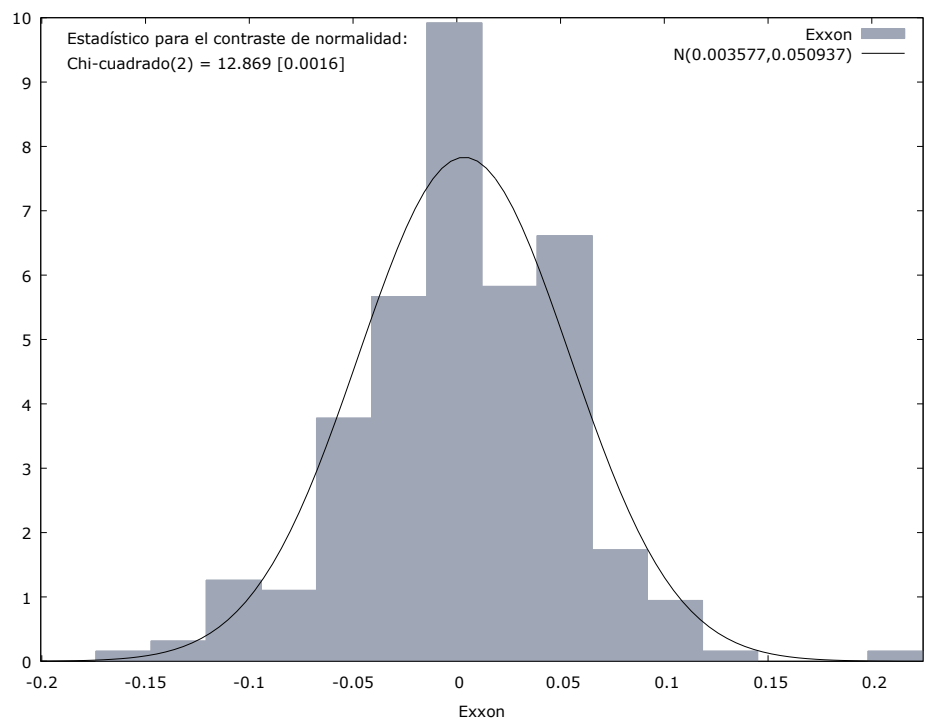


Gráfico 6:Histograma de ExxonMobil. Elaboración propia.

**Adobe Systems**

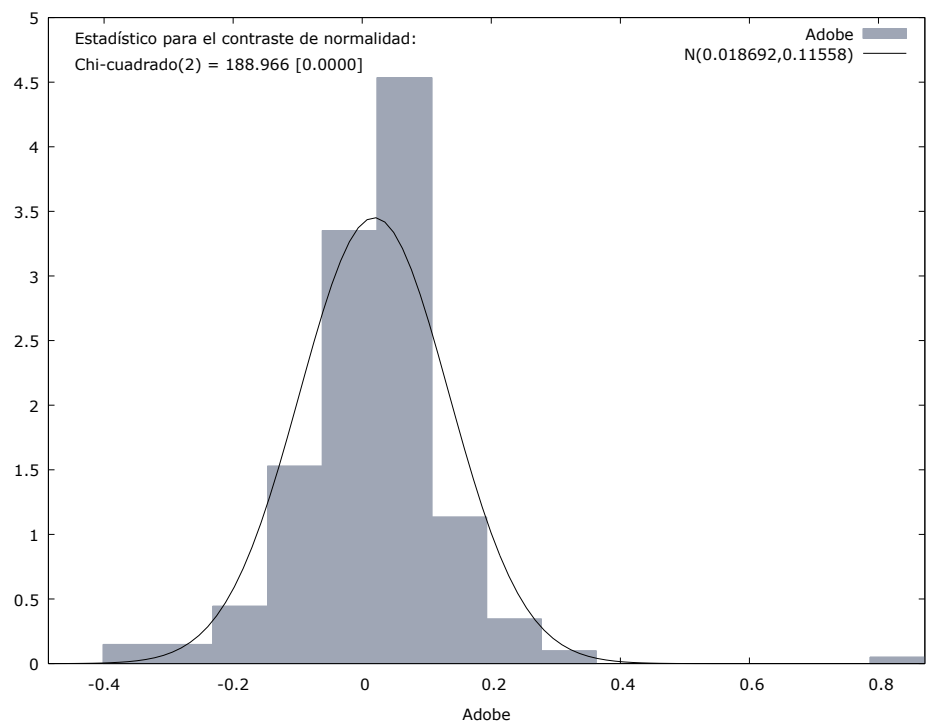


Gráfico 7:Histograma de Adobe Systems. Elaboración propia.

## Cartera equiponderada

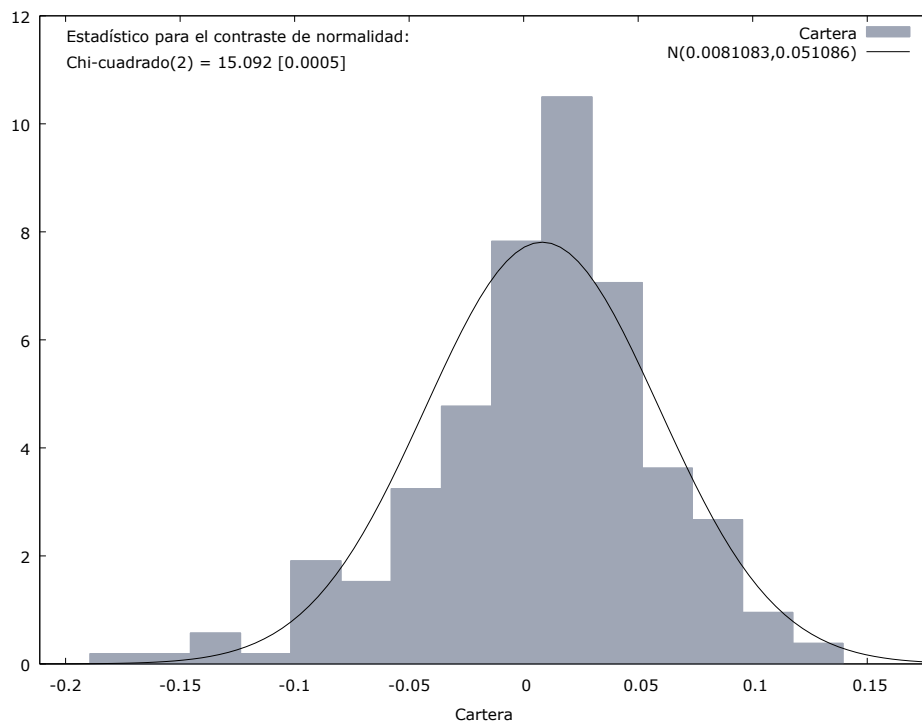


Gráfico 8: Histograma de la Cartera. Elaboración propia.

Como se puede observar, la distribución de frecuencias no se ajusta a la distribución de la normal en ninguna de las series.

También se va a realizar el contraste de normalidad Jarque-Bera, con el siguiente estadístico de contraste:

$$JB = \left( \frac{Asimetría(X)}{\sqrt{\frac{6}{n}}} \right)^2 + \left( \frac{Exceso\ de\ curtosis(X)}{\sqrt{\frac{24}{n}}} \right)^2$$

Que sigue una distribución chi-cuadrado con dos grados de libertad. La hipótesis nula es que la serie X sigue una distribución normal, y la hipótesis alternativa es que la distribución de la serie no es normal.

Para cada serie se obtienen los siguientes resultados:

	Estadístico JB	P valor
<i>Bank of America</i>	1061'49	$3'15846 \times 10^{-231}***$
<i>ExxonMobil</i>	13'0527	0'00146433***
<i>Adobe Systems</i>	1061'02	$3'99855 \times 10^{-231}***$
<i>Cartera</i>	27'3628	$1'14351 \times 10^{-006}***$

Tabla 5: Contraste de normalidad. Elaboración propia.

Como los p-valor de cada serie son prácticamente cero, para todas se rechaza la hipótesis nula de normalidad. Se concluye que no hay evidencia empírica de que alguna de las serie siga una distribución normal.

## 2. Estabilidad de la media y la varianza de la serie

En esta sección se va a realizar un análisis más profundo de la media y la varianza de cada una de las series.

### 2.1. Análisis de la estacionariedad en varianza

Primero se va a comprobar si las series son estacionarias en varianza, es decir, si la varianza es constante. Si en alguna no lo fuese, entonces la varianza dependería del nivel de la serie y sería necesario realizar alguna transformación en la serie para que sea estacionaria en varianza, ya que para estimar los modelos más adelante se requiere que la serie sea estacionaria en varianza.

La muestra de cada serie se divide en subgrupos de observaciones consecutivas, y para cada uno de esos subgrupos se calcula su rango y su media. Se realiza la regresión  $\text{rango} = \alpha + \beta \text{media} + u$  que relaciona el rango de cada subgrupo con su media, y se contrasta  $H_0: \beta = 0$  con  $H_1: \beta \neq 0$ . Si se rechaza la hipótesis nula significa que la media de cada grupo influye en su rango, por tanto, el nivel de la serie y su variabilidad están relacionadas.

	Pendiente de 'rango' con respecto a 'media'	P valor
<i>Bank of America</i>	1'4509	0'459859
<i>ExxonMobil</i>	-0'594081	0'548037
<i>Adobe Systems</i>	0'240671	0'892217
<i>Cartera</i>	-1'77003	0'0744661

Tabla 6: Contraste rango-media. Elaboración propia.

Para el nivel de significatividad habitual ( $\alpha = 0'05$ ) los p-valores son lo suficientemente grandes como para no rechazar  $H_0$  en ninguna de las series. Hay suficiente evidencia empírica de que  $\beta$  no es estadísticamente significativo, por tanto, la variabilidad de cada una de las series no depende de su nivel. Las series son estacionarias en varianza y se pueden estimar los modelos sin tener que realizar ninguna transformación adicional.

## 2.2. Análisis de la estacionariedad en media

Se va a comprobar si las series son estacionarias en media, es decir, si cada serie se mantiene estable entorno a un valor medio. Si una serie no fuese estacionaria en media, habría que diferenciar la serie hasta que lo fuera. En los gráficos de las series vistos anteriormente se observaba que estas oscilan alrededor del cero, por lo que se espera que todas sean estacionarias en media.

Para comprobar de manera empírica que la serie es estacionaria en media se va a realizar un contraste de Dickey Fuller Aumentado. Para cada serie se estima el modelo  $\Delta Y_t = \varphi^* Y_{t-1} + \sum_{k=1}^p \alpha_k \Delta Y_{t-k} + \varepsilon_t$  y se contrasta  $H_0: \varphi^* = 0$  con  $H_1: \varphi^* \neq 0$ . Como las series tienen frecuencia mensual se ha elegido el orden de retardos  $k = 12$ .

	Estadístico t de $\varphi^*$	P valor
<i>Bank of America</i>	-5'710	$2'14 \times 10^{-8}***$
<i>ExxonMobil Corporation</i>	-16'66	$8'61 \times 10^{-033}***$
<i>Adobe Systems</i>	-5'980	$5'17 \times 10^{-09}***$
<i>Cartera</i>	-14'22	$2'35 \times 10^{-028}***$

Tabla 7: Contraste ADF de raíz unitaria. Elaboración propia.

En todos los casos se obtiene un p-valor muy pequeño, con lo que se rechaza la hipótesis nula a todos los niveles de significatividad. Así que la evidencia empírica dice que  $Y_t$  no tiene una raíz unitaria y la serie es estacionaria en media.

Como todas las series son estacionarias en media y en varianza, se puede trabajar con ellas sin tener que realizar ninguna transformación adicional.

### 3. Modelización

Para saber qué tipo de modelo sigue cada serie primero se identifican los posibles modelos que tienen funciones de correlaciones simples y parciales como las de la serie, después se estiman esos modelos y se evalúan para saber cuál es el más adecuado (Box et al, 1994).

En el modelo más adecuado todos los coeficientes deben ser significativos, las correlaciones de los residuos no deben contener ninguna información, y el modelo tiene que ser invertible y estacionario. Además, se van a utilizar los criterios de información de Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn para comparar los posibles modelos. Estos criterios tienen en cuenta dos términos: uno contiene la suma de los cuadrados de los residuos del modelo y el otro la complejidad del modelo. Entre dos modelos similares, aquel que minimice estos criterios será mejor.

A continuación se muestran los correlogramas de las series. Arriba aparece la función de correlación simple y abajo la función de correlaciones parciales.



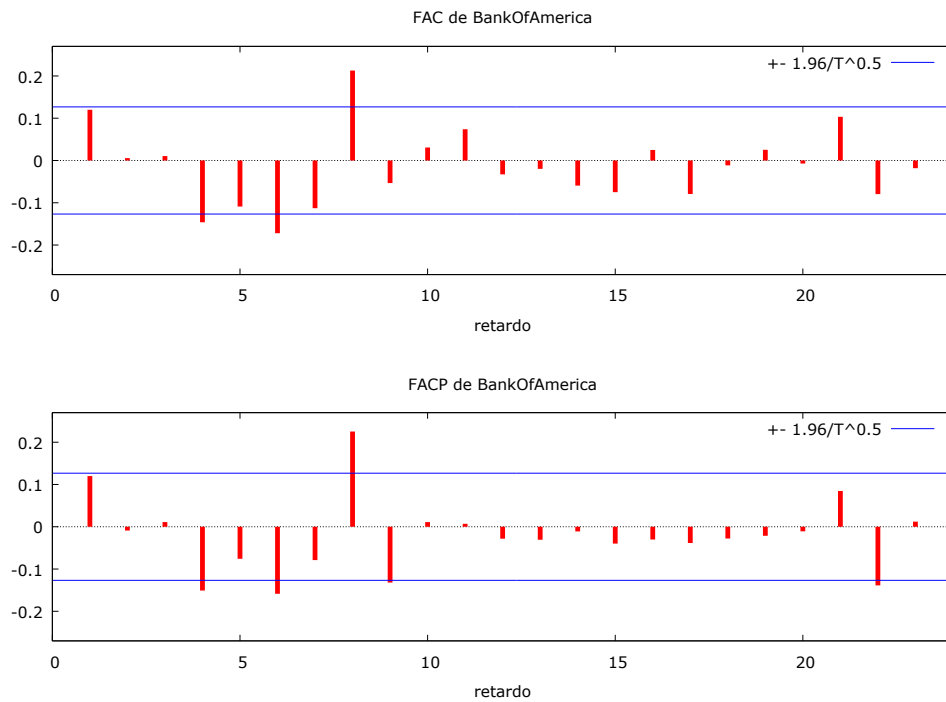


Gráfico 9: Correlograma de Bank of America. Elaboración propia.

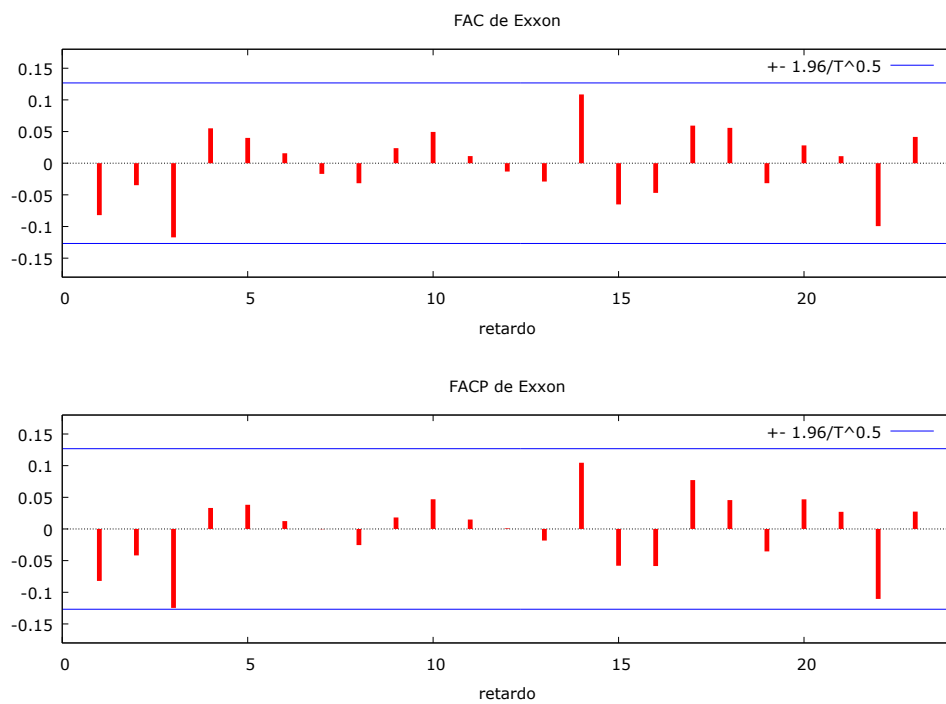
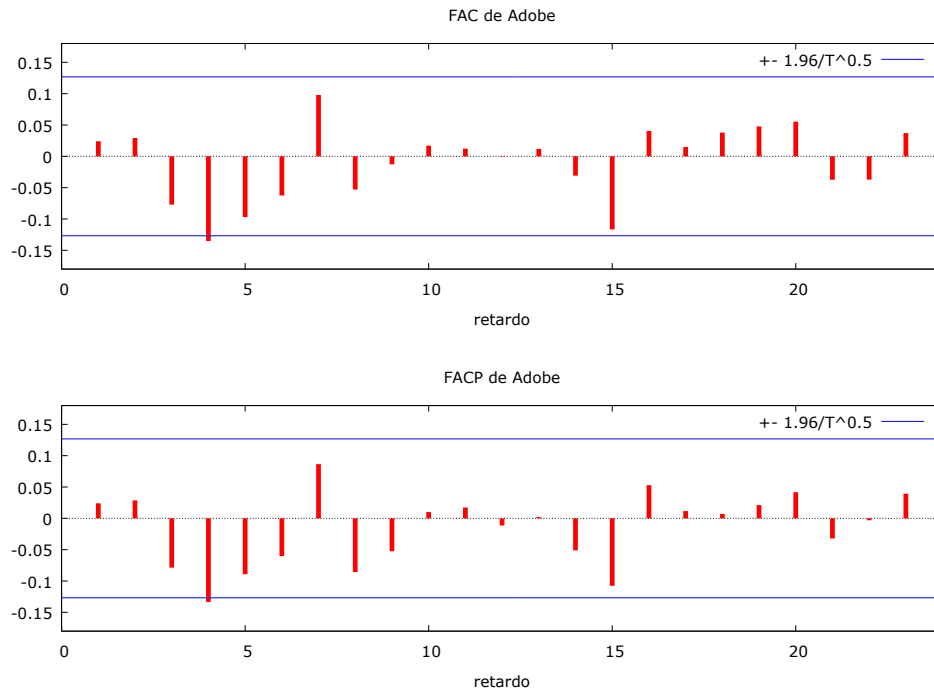
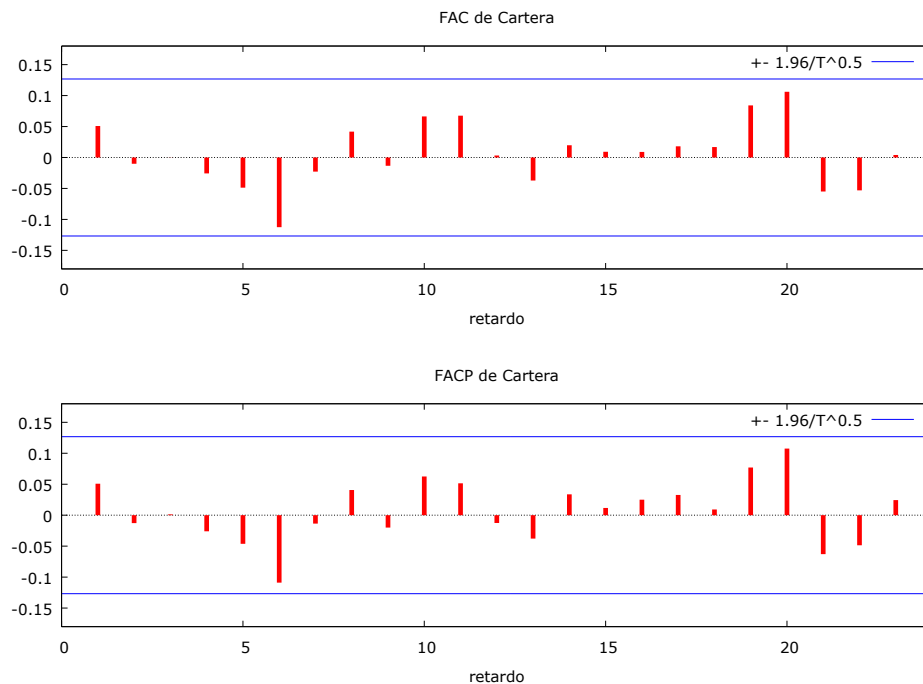


Gráfico 10: Correlograma de ExxonMobil. Elaboración propia.



*Gráfico 11: Correlograma de Adobe Systems. Elaboración propia.*



*Gráfico 12: Correlograma de la Cartera Equiponderada. Elaboración propia.*

El modelo que mejor se ajusta a cada serie, siendo estacionario e invertible, con los coeficientes significativos, dejando menos información en los residuos y minimizando los criterios de información son los que se muestran a continuación. Para más

información sobre los modelos que se han considerado se puede consultar la sección 8.2 Modelización del Anexo.

MA(8) para la serie de Bank of America, siendo significativos solo cuatro de los retardos.

$$Y_t = \mu + \theta_1u_{t-1} + \theta_6u_{t-6} + \theta_7u_{t-7} + \theta_8u_{t-8} + u_t$$

Bank of America	$\mu$	$\theta_1$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$
Coeficiente	0'00860120	0'178788	-0'173721	-0'162334	0'263598
Desviación típica	0'00795603	0'0613930	0'0626416	0'0663565	0'0707925
P-valor	0'2797	0'0036***	0'0056***	0'0144**	0'0002***

Tabla 8: Modelo MA(8) que mejor se ajusta a la serie de Bank of America. Elaboración propia.

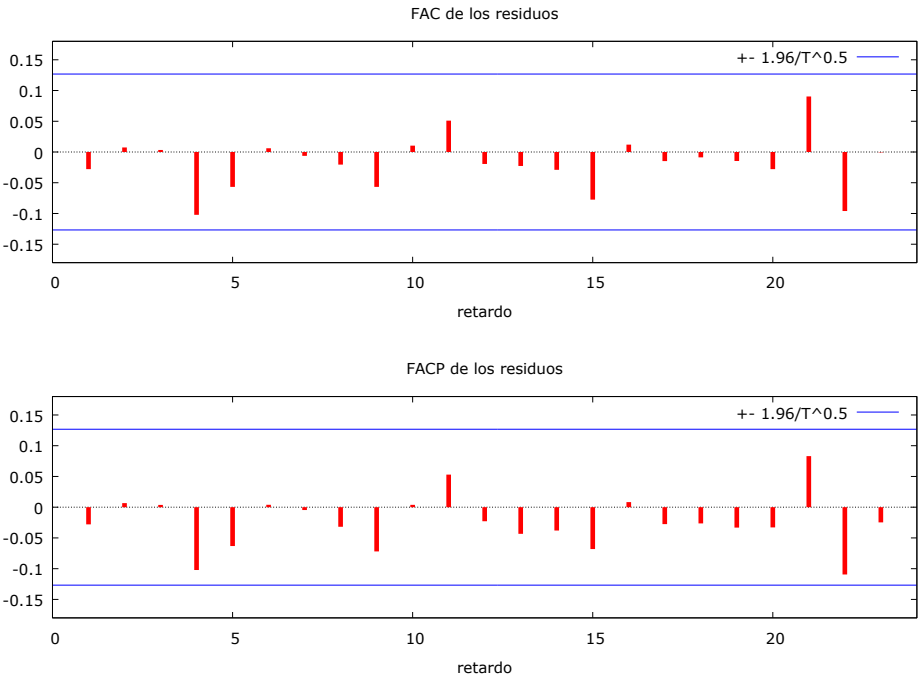


Gráfico 13: Correlograma de los residuos del MA(8) de Bank of America. Elaboración propia.

Ruido blanco para ExxonMobil, ya que ningún otro modelo mejora los criterios o el correlograma de los residuos.

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t$$

ExxonMobil	$\mu$
Coeficiente	0'00357703
Desviación típica	0'00329482
P-valor	0'2776

Tabla 9: Modelo ruido blanco que mejor se ajusta a ExxonMobil. Elaboración propia.

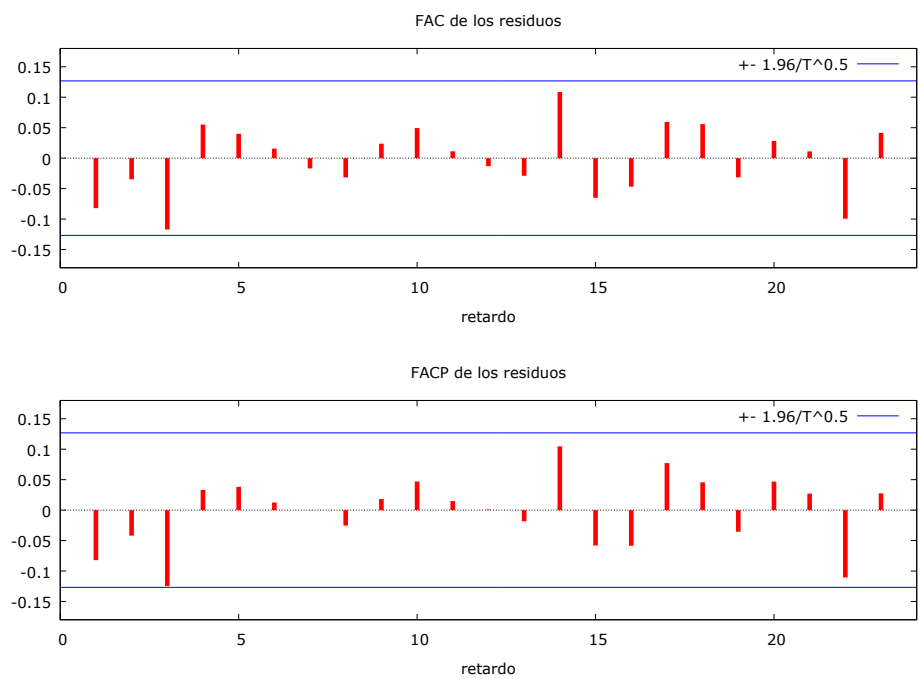


Gráfico 14: Correlograma de los residuos del Ruido blanco de ExxonMobil. Elaboración propia.

ARMA(2,2) para Adobe Systems.

$$Y_t = \mu + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Adobe Systems	$\mu$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\varphi_1$	$\varphi_2$
Coeficiente	0'0187813	-0'578110	0'833472	0'639634	-0'771360
Desviación típica	0'00817300	0'226119	0'111123	0'256024	0'150108
P-valor	0'0216**	0'0106**	<0'0001***	0'0125**	<0'0001***

Tabla 10: Modelo ARMA(2,2) que mejor se ajusta a Adobe Systems. Elaboración propia.

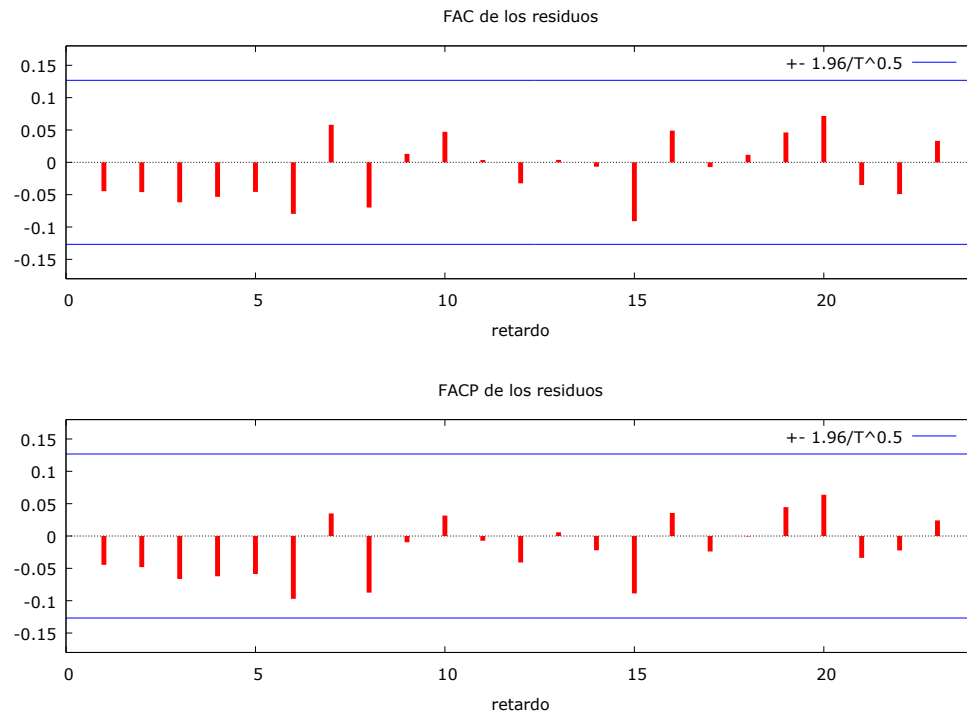


Gráfico 15: Correlograma de los residuos del ARMA(2,2) de Adobe Systems. Elaboración propia

Ruido blanco para la Cartera equiponderada.

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t$$

Cartera	$\mu$
Coefficiente	0'00810833
Desviación típica	0'00330447
P-valor	0'0141**

Tabla 11: Modelo ruido blanco que mejor se ajusta a la Cartera equiponderada. Elaboración propia.

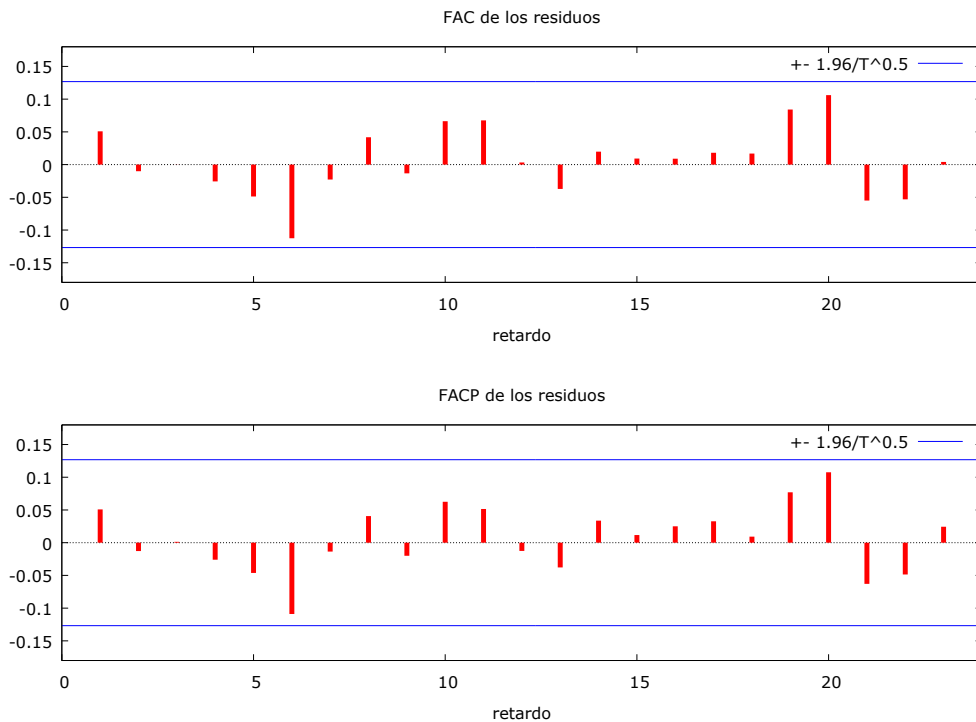


Gráfico 16: Correlograma de los residuos del Ruido blanco de la Cartera. Elaboración propia.

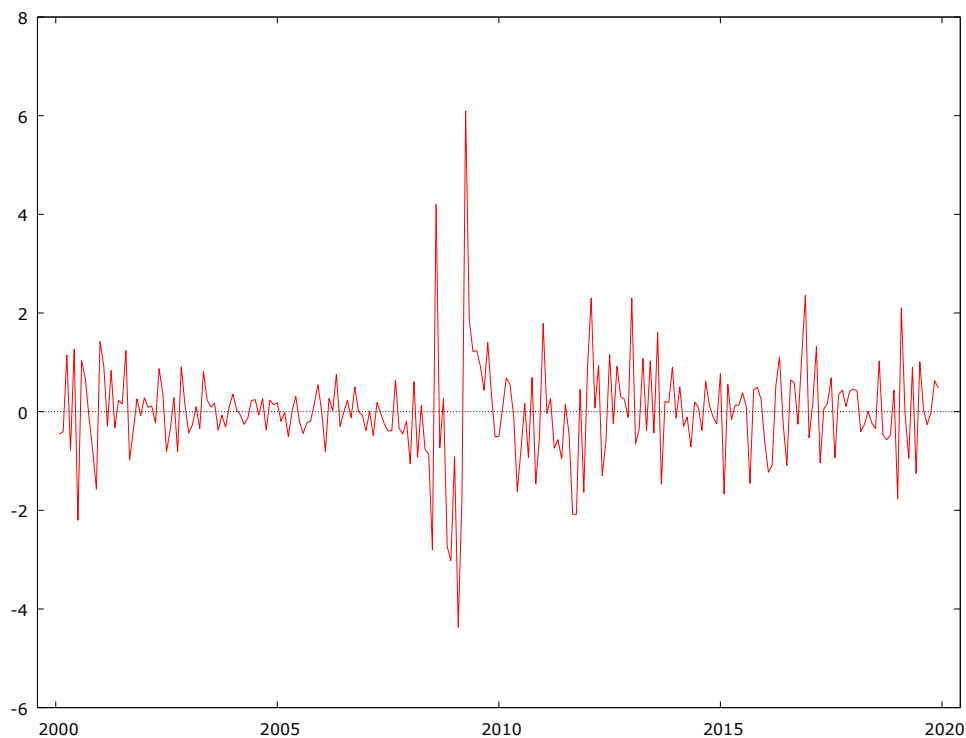
### 3.1.Valores atípicos

En la sección anterior se han mostrado los modelos que mejor se ajustan para cada serie. Pero puede que la existencia de valores atípicos haya influido en el modelo elegido. Por ejemplo, resulta llamativo que para la serie del Bank of America (una serie financiera) el MA(8) sea el modelo que mejor se ajusta, ya que tiene un orden muy alto. Puede ser que algo influyera en el comportamiento de la serie en un momento dado, generando un valor atípico, y por eso la correlación de orden ocho es tan significativa. En ese caso, si se controlara por el valor atípico (añadiéndose este como variable explicativa), se podría obtener un modelo que se ajustase mejor a la serie.

En esta sección se va a comprobar la existencia de valores atípicos para cada serie y sus efectos en su comportamiento.

Para identificar los valores atípicos se guardan los residuos del modelo elegido y se estandarizan (a cada uno se le resta la media de los residuos y se divide entre su desviación típica). Esto va a permitir cambiar la escala y ponerla en función de la

desviación típica de todos los residuos. En función de cuántas desviaciones típicas se aleje cada residuo de la media se decidirá si es un valor atípico o no.



*Gráfico 17: Residuos estandarizados del MA(8) para el Bank of America. Elaboración propia.*

La mayoría de los valores se quedan en el intervalo  $[-2, 2]$ . Se van a considerar atípicos los que se encuentren en valor absoluto a más de 4 desviaciones típicas, que son los siguientes:

(2008:08) Agosto de 2008: 4'206

(2009:02) Febrero de 2009: -4'37

(2009:04) Abril de 2009: 6'094

Estas fechas coinciden con la crisis financiera iniciada en 2008.

Desde principios de 2008 el Gobierno de los Estados Unidos estaba nacionalizando aquellos bancos que se encontraban en una situación económica muy complicada y podían quebrar, o fomentando su compra por parte de bancos más grandes. Las acciones de todos los bancos estaban cayendo como consecuencia de esto. Pero el Bank of America no necesitó de la ayuda del gobierno y además adquirió algunos de esos bancos en julio de 2008, por eso en agosto de 2008 el precio de las acciones sube tras

meses de bajadas (hay expectativas optimistas para el Bank of America y de ahí la alta rentabilidad 4'206).

En septiembre de 2008 tuvo lugar la quiebra de Lehmann Brothers y el pánico bancario hizo que la situación empeorara para todos los bancos estadounidenses. El Bank of America adquiere entonces Merrill Lynch sin tener pleno conocimiento de la mala situación en la que se encontraban sus cuentas, información que se revela en los siguientes meses. Finalmente, el banco necesita un rescate y llega a un acuerdo con la Reserva Federal en enero de 2009. Entonces el precio de las acciones cayó en picado (rentabilidad de -4'37).

El banco consigue mejorar sus cuentas gracias al rescate. Se forma una comisión de investigación en el Congreso de los Estados Unidos para seguir la situación en el sector financiero y vigilar que los fondos que la Reserva Federal ha proporcionado se están utilizando adecuadamente. Ken Lewis, CEO del Bank of America, testifica en la comisión en abril de 2009 que las cuentas del banco están saneadas, y el precio de las acciones vuelve a repuntar (rentabilidad de 6'094).

Para comprobar si estos valores tienen influencia en el comportamiento de la serie se van a crear tres variables binarias que representen estos valores y se van a añadir como variables explicativas al modelo. Como las variables binarias se crean a partir de los valores de la serie original y la serie de estudio son las rentabilidades, es necesario diferenciarlas. Las variables creadas recogen el efecto puntual de estos valores atípicos, el efecto permanente de los mismos, o el efecto que han tenido un grupo de observaciones atípicas (cuando el efecto duraba dos o tres meses).

Al añadir los valores atípicos de esta manera, como variables binarias diferenciadas al modelo, solo dos resultan ser significativos. Uno es el efecto que han tenido un grupo de observaciones atípicas (que recoge los valores desde agosto a octubre de 2008) y otro es el efecto permanente que tiene lugar a partir de abril de 2009.

Al controlar por estos valores el modelo que mejor se ajusta ahora es un MA(1).



Bank of America	$\mu$	$\theta_1$	$\beta_{2008}$	$\beta_{2009}$
Coeficiente	0'00514120	0'167211	0'368116	0'784605
Desviación típica	0'00760636	0'0598642	0'0700108	0'0994057
P-valor	0'4991	0'0052***	<0'0001***	<0'0001***

Tabla 12: Modelo MA(1) que mejor se ajusta a Bank of America. Elaboración propia.

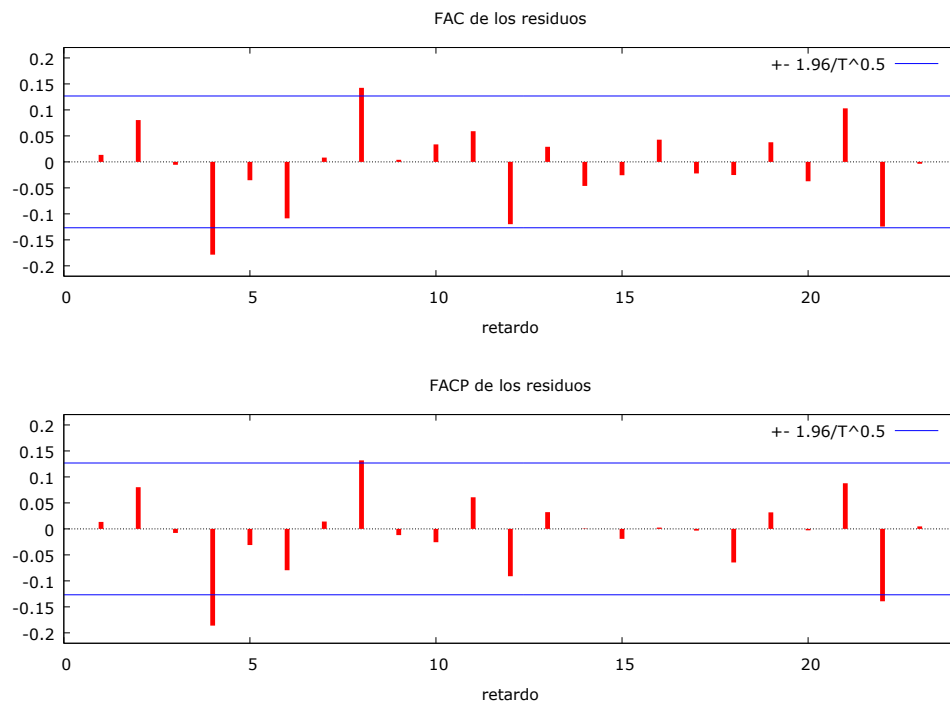


Gráfico 18: Correlograma de los residuos del modelo MA(1) de Bank of America. Elaboración propia.

En el caso de ExxonMobil, sus residuos estandarizados son los siguientes:



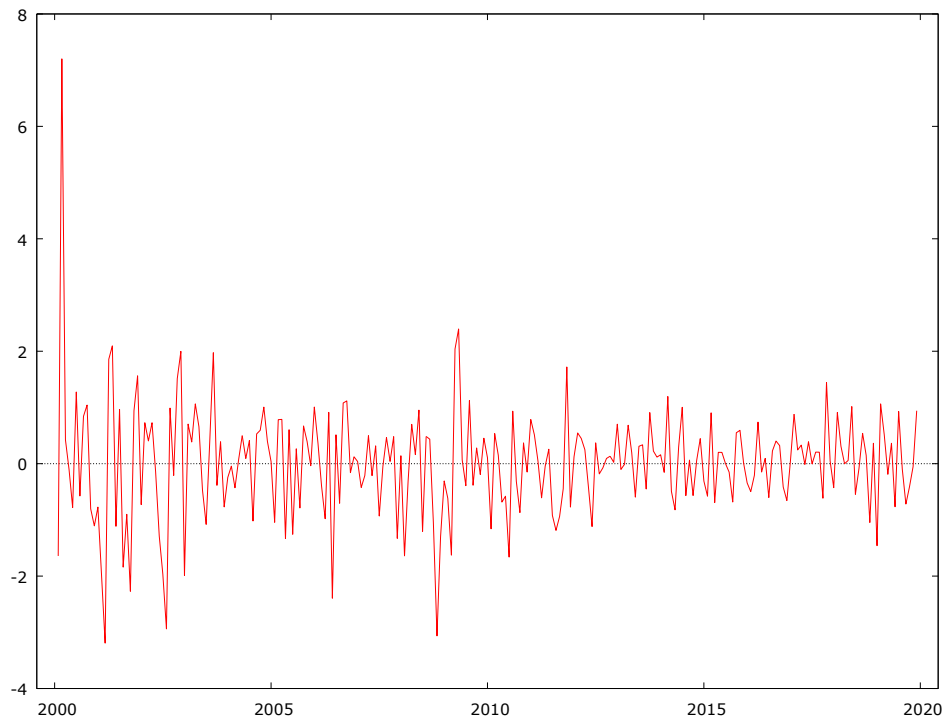
*Gráfico 19: Residuos estandarizados del Ruido blanco para ExxonMobile Corporation. Elaboración propia.*

Solo hay un valor que se podría considerar muy alejado de la media:

(2005:03) Marzo de 2005: 4'165431

Pero no se ha encontrado justificación para ese valor. No parece haber ninguna noticia, hecho o situación que influyera en la serie durante ese mes, así que no se va a incluir en el modelo.

En el caso de Adobe Systems, sus residuos estandarizados son los siguientes:



*Gráfico 20: Residuos estandarizados del ARMA(2,2) para Adobe Systems. Elaboración propia.*

A más de 3 desviaciones típicas se encuentran:

(2000:03) Marzo del 2000: 7'082894

(2001:03) Marzo del 2001: -3'240355

(2002:08) Agosto del 2002: -3'130363

(2008:11) Noviembre del 2008: -3'207964

Los valores atípicos hasta agosto del 2002 están relacionados con la burbuja de las punto-com. El de noviembre de 2008 está relacionado con la crisis del 2008. Todos los valores son significativos: el de marzo del 2000 es un efecto puntual, desde marzo de 2001 a agosto de 2002 hay un efecto temporal, y el de noviembre de 2008 supone un efecto permanente. El nuevo modelo que mejor se ajusta sigue siendo un ARMA(2,2).

<b>Adobe Systems</b>	$\mu$	$\theta_1$	$\varphi_1$	$\beta_{2000}$	$\beta_{2002}$	$\beta_{2008}$
Coeficiente	0'018109	-0'740815	0'577442	0'273582	0'250225	-0'21428
Desviación típica	0'00423342	0'103905	0'133264	0'0863890	0'0851246	0'0737648
P-valor	<0'0001***	<0'0001***	<0'0001***	0'0015***	0'0033***	0'0037***

Tabla 13: ARMA(2,2) que mejor se ajusta a Adobe Systems. Elaboración propia.

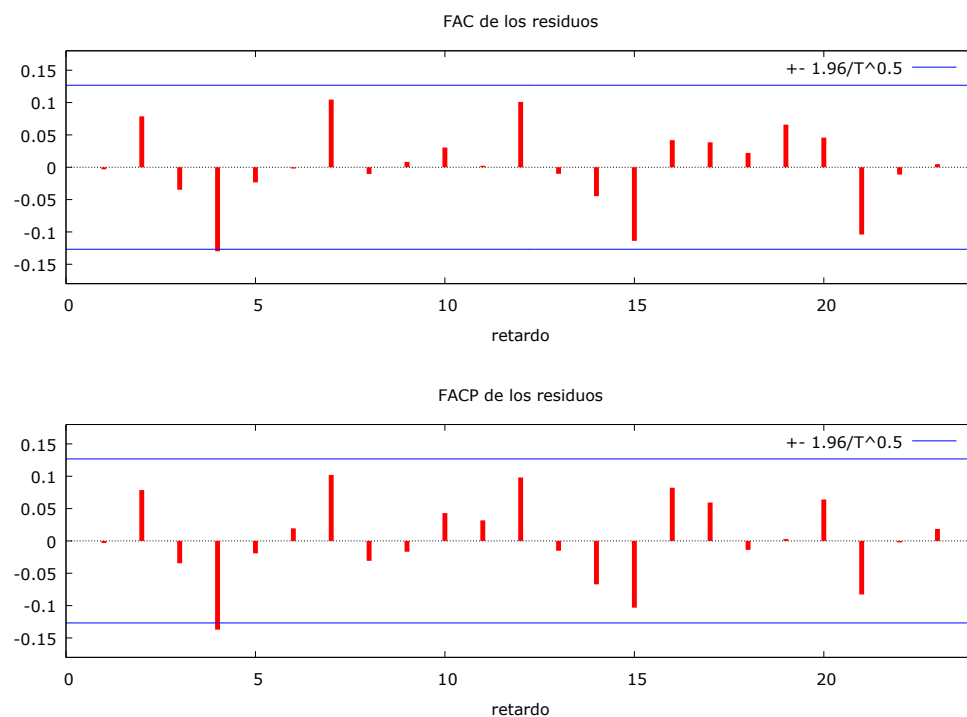


Gráfico 21: Correlograma de los residuos del ARMA(2,2) de Adobe Systems. Elaboración propia

Para la Cartera equiponderada, sus residuos estandarizados son los siguientes:

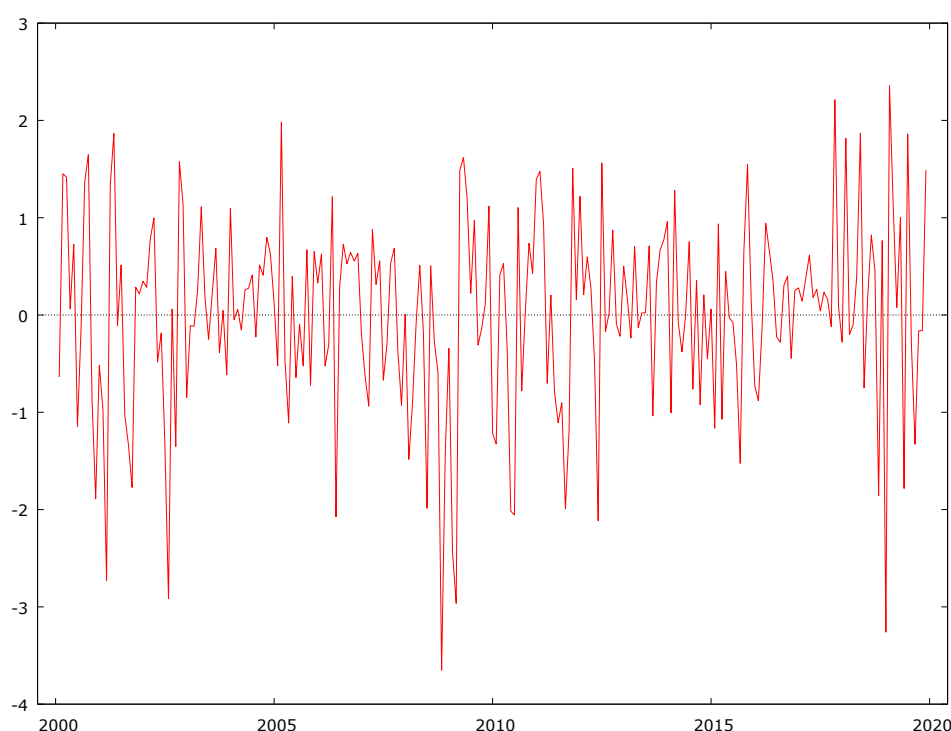


Gráfico 22: Residuos estandarizados del Ruido blanco para la Cartera equiponderada. Elaboración propia

Se van a considerar atípicos los que se sitúen a más de 3 desviaciones típicas:

(2008:11) Noviembre de 2008: -3'650804

Este valor coincide con uno de los valores atípicos de Adobe Systems. Puede ser que al ponderar la cartera este valor sea tan significativo que su efecto no se haya diluido. En la serie de Adobe Systems se trataba de un valor que producía un cambio permanente en la serie y ahora también. La Cartera sigue un proceso de ruido blanco.

Cartera	$\mu$	$\beta_{2008}$
Coeficiente	0'00889197	-0'187289
Desviación típica	0'00322372	0'0498376
P-valor	0'0058***	0'0002***

Tabla 14: Ruido blanco que mejor se ajusta a la Cartera equiponderada Elaboración propia.

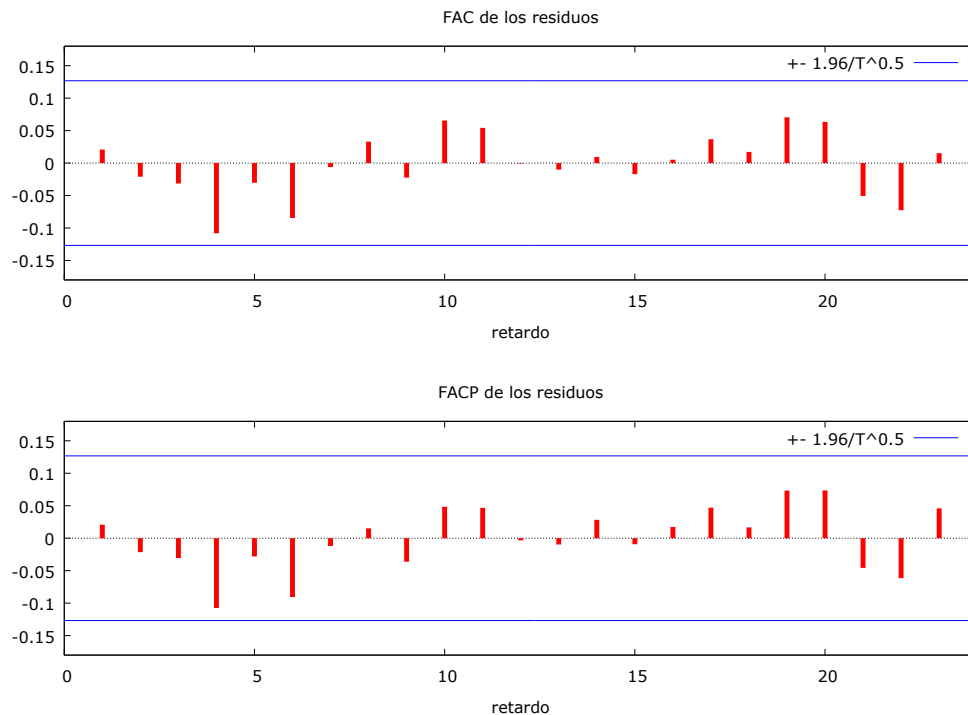


Gráfico 23: Correlograma de los residuos del ruido blanco de la Cartera. Elaboración propia

Después de haber considerado los valores atípicos que han influido en las series, solo la de Bank of America ha pasado de un MA(8) a un MA(1). El resto de las series siguen siendo un ruido blanco para ExxonMobil y para la Cartera y un ARMA(2,2) para Adobe Systems.

## 4. Volatilidad

Una característica de las series financieras como son las de este estudio (rentabilidad del precio de las acciones) es que suelen tener volatilidad, es decir, que la varianza condicional de la serie no es constante y cambia con el tiempo. Es lo que se conoce como heterocedasticidad condicional. Hasta aquí se ha supuesto que la varianza condicional de las series es constante, pero en esta sección se va a contrastar si efectivamente se trata de un buen supuesto y, en el caso de que no lo sea y exista heterocedasticidad condicional, se va a buscar un modelo para estimarla.

#### 4.1. Presencia de heterocedasticidad condicional

La volatilidad es una medida de la variabilidad de la serie, y se puede observar viendo cómo se comportan los residuos del modelo. En este trabajo se van a mostrar los residuos al cuadrado, aunque hay otras medidas también válidas como los residuos en valor absoluto.

Los valores atípicos que afectan a un grupo de observaciones o a partir de una observación determinada también pueden provocar cambios en la varianza condicional de la serie (Peña, 2017). En todas las series excepto en la de Exxon se han incluido valores atípicos que provocan un cambio permanente en la serie, así que es interesante ver si en las mismas series pero sin los valores atípicos hay más variabilidad que en las series con valores atípicos.

En los dos gráficos siguientes se muestran los residuos al cuadrado del modelo MA(1) con atípicos y sin atípicos, respectivamente, para Bank of America. Se ve claramente que hay mayor variación en los años 2008-2009 (la crisis financiera, donde también se encontraban los valores atípicos) y que la variación aumenta en general después de este periodo. La serie es más volátil desde la crisis financiera. Además, los valores alcanzados son mayores cuando no se incluyen los valores atípicos en el modelo.

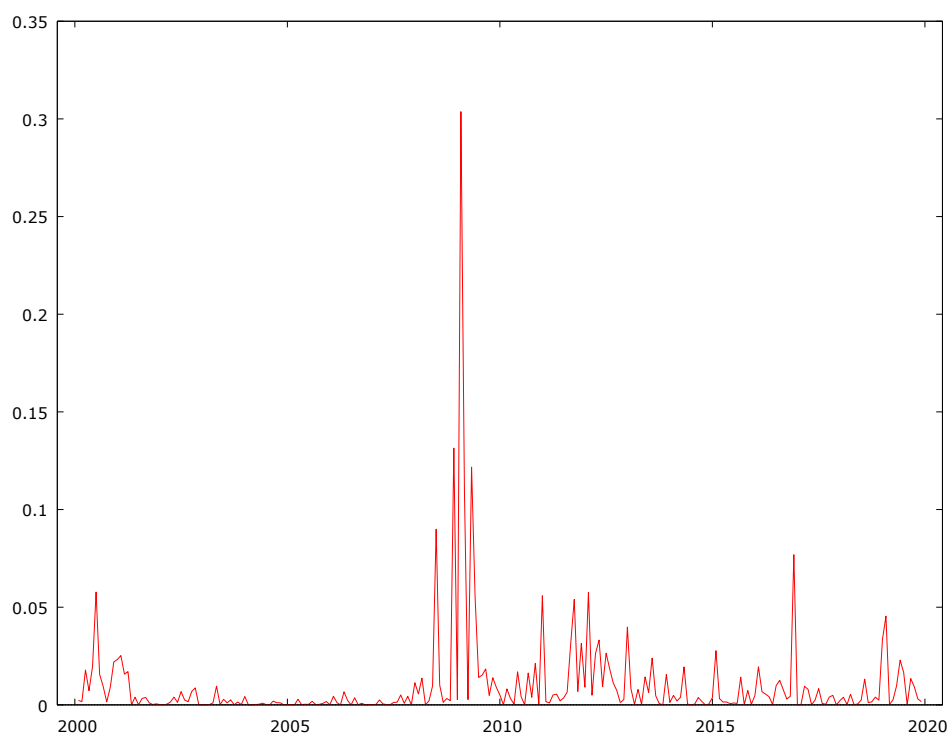


Gráfico 24: Residuos al cuadrado del modelo MA(1) con valores atípicos para Bank of America. Elaboración propia.

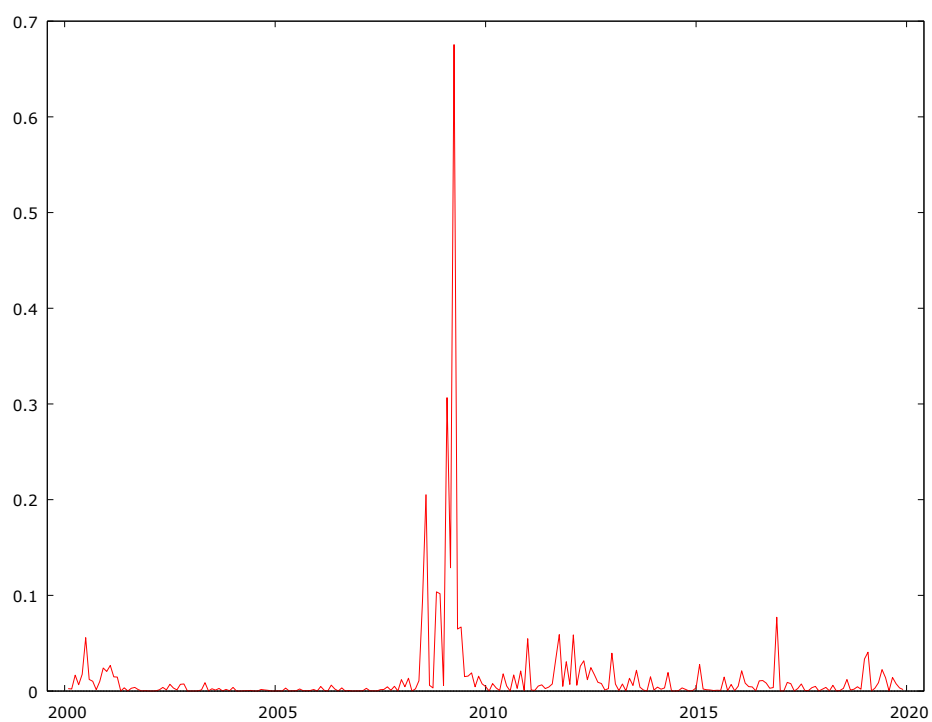
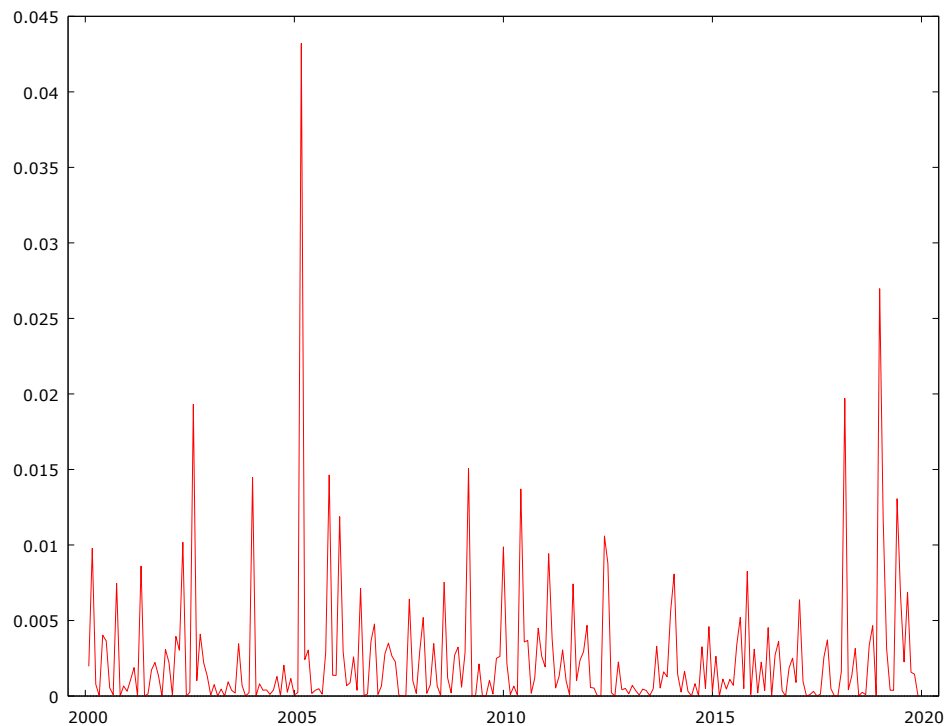


Gráfico 25: Residuos al cuadrado del modelo MA(1) sin valores atípicos para Bank of America. Elaboración propia.



En el caso de ExxonMobil, los residuos al cuadrado del ruido blanco no parecen mostrar picos de variación muy altos (nótese la escala de valores a la izquierda en comparación con las otras series).



*Gráfico 26: Residuos al cuadrado del ruido blanco para ExxonMobil. Elaboración propia.*

En los dos gráficos siguientes se muestran los residuos al cuadrado del modelo ARMA(2,2) con atípicos y sin atípicos, respectivamente, para Adobe Systems. Hay mucha más variabilidad en la serie durante los primeros años hasta el 2003 (coincidiendo con los años de la burbuja de las punto-com) y más tarde vuelve a haber otro tramo con algo de variabilidad entre el 2008-2010 (que seguramente se deba a la crisis financiera). Después de ese tramo la variabilidad va descendiendo. No incluir los valores atípicos en el modelo hace que se alcancen valores mucho más altos.

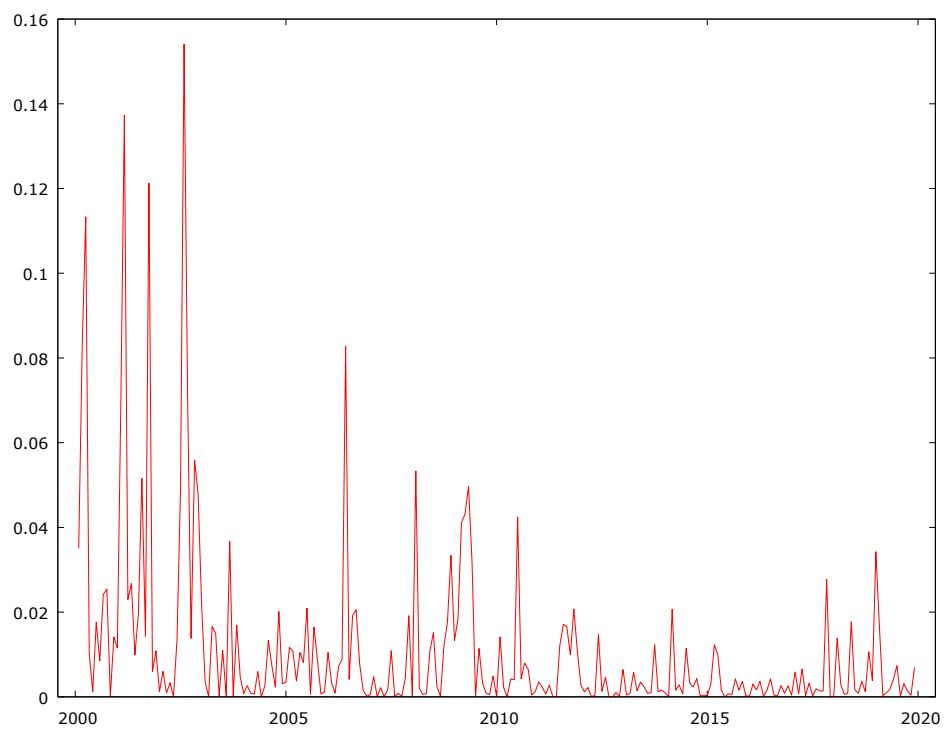


Gráfico 27: Residuos al cuadrado del modelo ARMA(2,2) con valores atípicos para Adobe Systems. Elaboración propia.

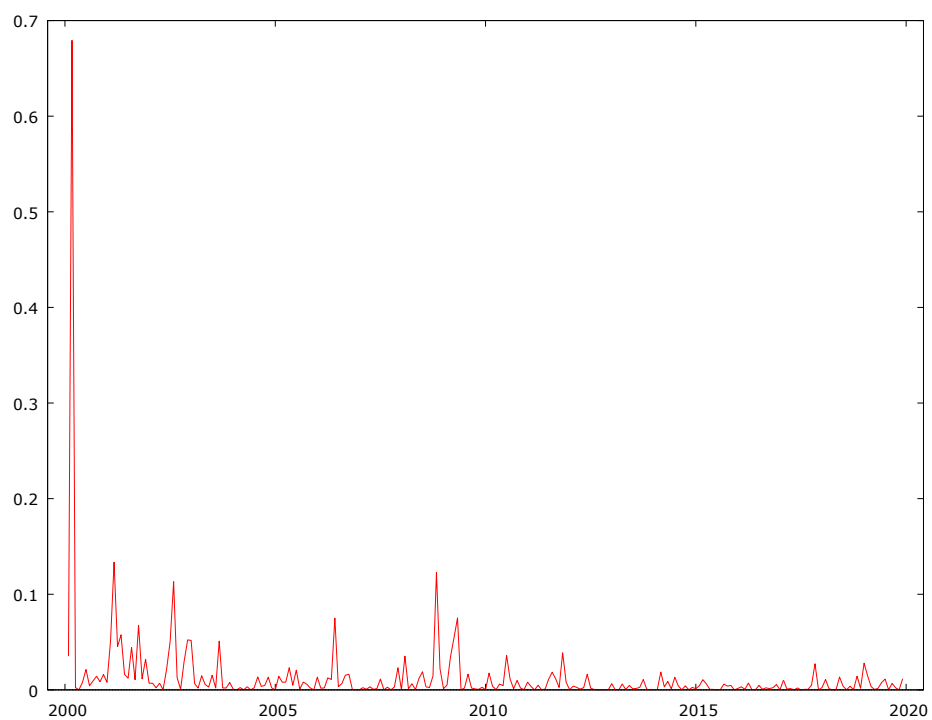
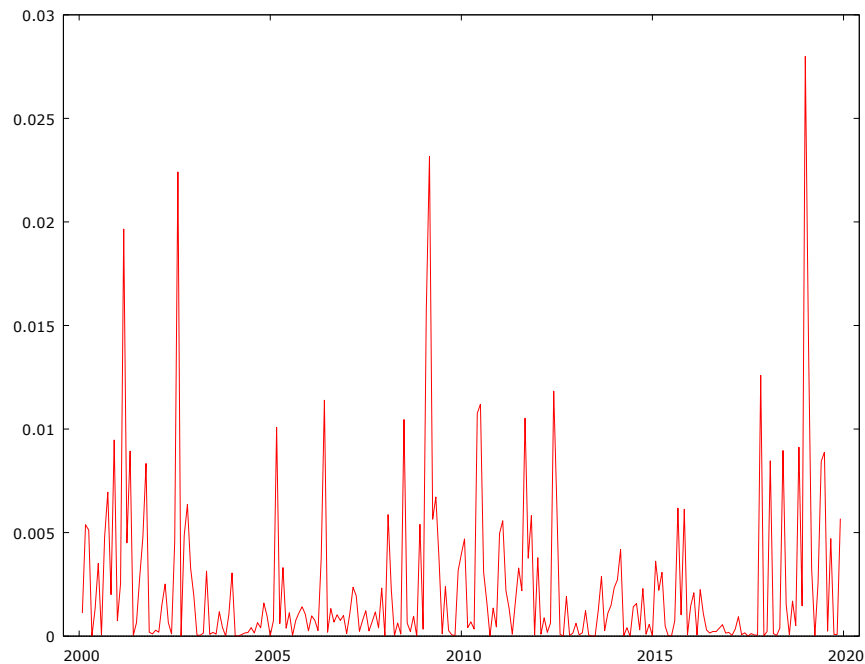
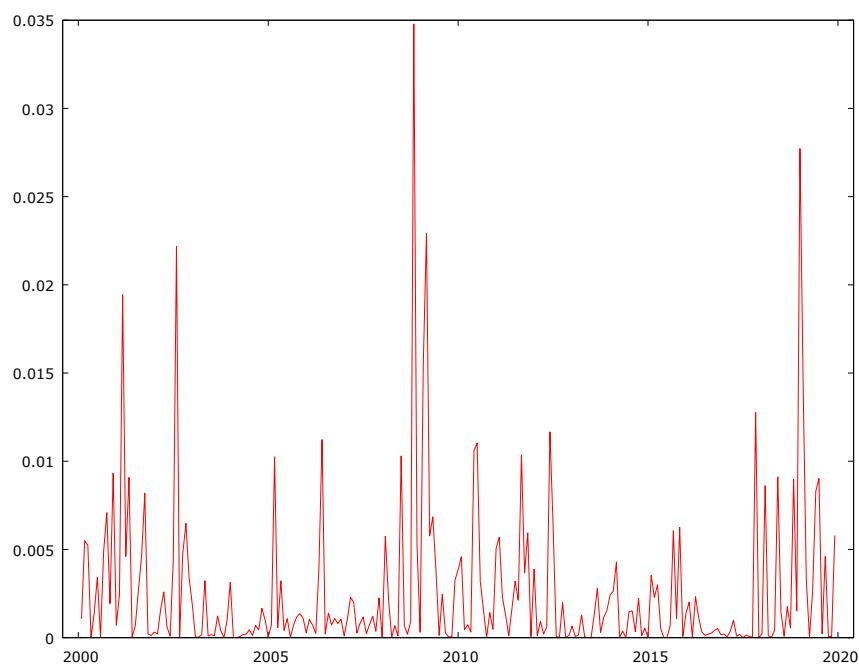


Gráfico 28: Residuos al cuadrado del modelo ARMA(2,2) sin valores atípicos para Adobe Systems. Elaboración propia.

En los dos gráficos siguientes se muestran los residuos al cuadrado del ruido blanco de la Cartera, con atípicos y sin atípicos, respectivamente. La Cartera no parece presentar volatilidad, ya que los picos más altos de variabilidad realmente corresponden a valores muy bajos. El modelo que no tiene en cuenta el valor atípico presenta valores ligeramente mayores.



*Gráfico 29: Residuos al cuadrado del ruido blanco con valores atípicos para la Cartera. Elaboración propia.*



*Gráfico 30: Residuos al cuadrado del ruido blanco sin valores atípicos para la Cartera. Elaboración propia.*

Para contrastar si existe volatilidad se puede realizar un contraste ARCH (Engle, 1982). Al ver los correlogramas de los residuos al cuadrado de las series se ve que algunas correlaciones son significativas. Además, por cómo se cortan al llegar a un determinado orden  $p$  parecen tener estructura  $AR(p)$ . Se va a realizar un contraste con tantos retardos como el orden de correlaciones significativas en los residuos al cuadrado. La  $H_0$  es que no hay estructura ARCH (las correlaciones no están relacionadas, no hay volatilidad, la varianza condicional sería constante), y la alternativa es que sí que hay estructura ARCH (volatilidad, heterocedasticidad condicional). (Ver Anexo 8.4 Volatilidad)

	Estadístico LM	P valor
<i>Bank of America</i>	45'0305	$1'34908 \times 10^{-007***}$
<i>ExxonMobil</i>	6'97736	0'859106
<i>Adobe Systems</i>	68'175	$9'17806 \times 10^{-008***}$
<i>Cartera</i>	12'4946	0'000408123

Tabla 15: Contraste ARCH de presencia de heterocedasticidad condicional. Elaboración propia.

Solo en la serie de Exxon no se rechaza la hipótesis nula, por lo que las otras tres series presentan volatilidad.

Como la presencia de autocorrelación en los cuadrados de los residuos puede deberse también a la existencia de valores atípicos y no solo a la heterocedasticidad condicional (Peña, 2017), se va a repetir el contraste ARCH para las series sin valores atípicos.

	Estadístico LM	P valor
<i>Bank of America</i>	58'2327	$2'93262 \times 10^{-009***}$
<i>ExxonMobil</i>	6'97736	0'859106
<i>Adobe Systems</i>	70'5011	$2'58085 \times 10^{-010***}$
<i>Cartera</i>	16'5825	0'00232929

Tabla 16: Contraste ARCH de presencia de heterocedasticidad condicional en las series sin valores atípicos.

Elaboración propia.

Solo en la serie de ExxonMobil no se rechaza la hipótesis nula, por lo que las otras tres series, al igual que antes, presentan heterocedasticidad condicional.

En las siguientes secciones se va a modelizar la volatilidad de las series desde diferentes enfoques.

#### 4.2. Modelización clásica de la volatilidad: EWMA

Uno de los modelos clásicos usados para la estimación y predicción de la volatilidad es la Media Móvil Exponencial Ponderada (Exponentially Weighted Moving Average, EWMA).

Para un proceso estocástico  $Y_t$  se define la varianza condicional al momento  $t$  como la esperanza del cuadrado de los residuos menos la media del proceso, condicionado al conjunto de información hasta el momento  $t-1$ :

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \left[ E(Y_t - \mu_{t|t-1})^2 | I_{t-1} \right]$$

El modelo EWMA especifica la dependencia de la varianza condicional al conjunto de información como una media ponderada del cuadrado de los residuos menos la media, dándole más importancia a las realizaciones más recientes y menos a las más lejanas.

$$\hat{\sigma}_{t|t-1}^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{i-1} (Y_{t-i} - \mu)^2 \quad \text{para } \lambda \in (0,1)$$

En este trabajo se ha elegido el valor de  $\lambda = 0.88$  (Bollen, 2014) para estimar la varianza condicional de cada serie. A continuación se muestran las estimaciones de la varianza mediante EWMA (línea azul) y la serie  $Y_t$  correspondiente (línea roja).

## Bank of America

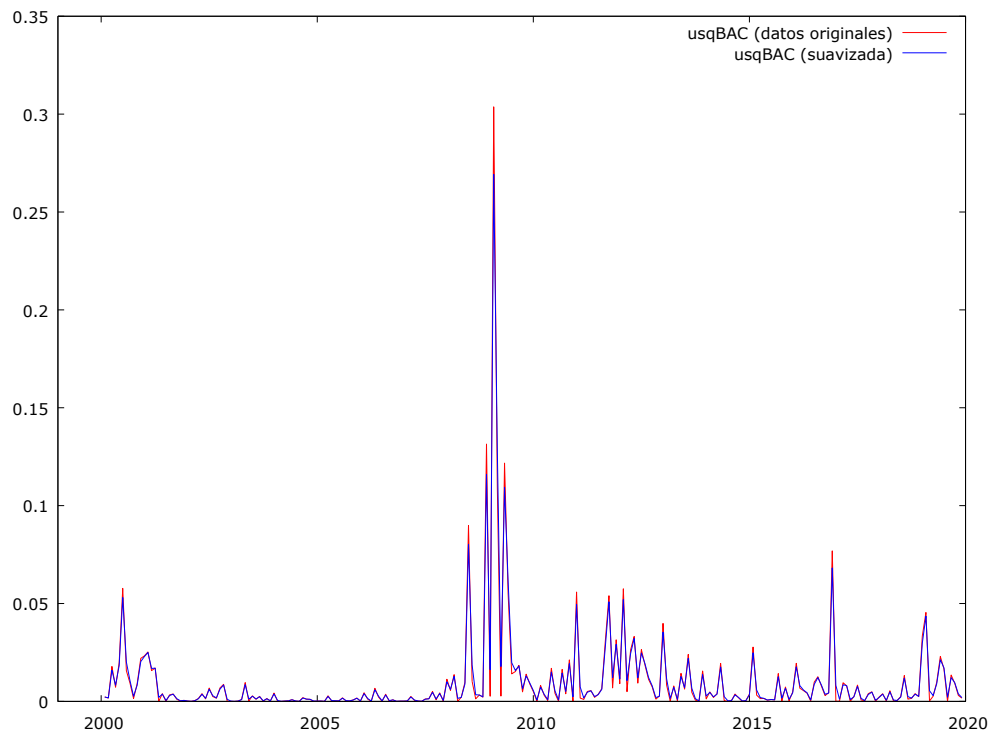


Gráfico 31: Estimación de la varianza condicional mediante EWMA para Bank of America. Elaboración propia.

## Adobe Systems

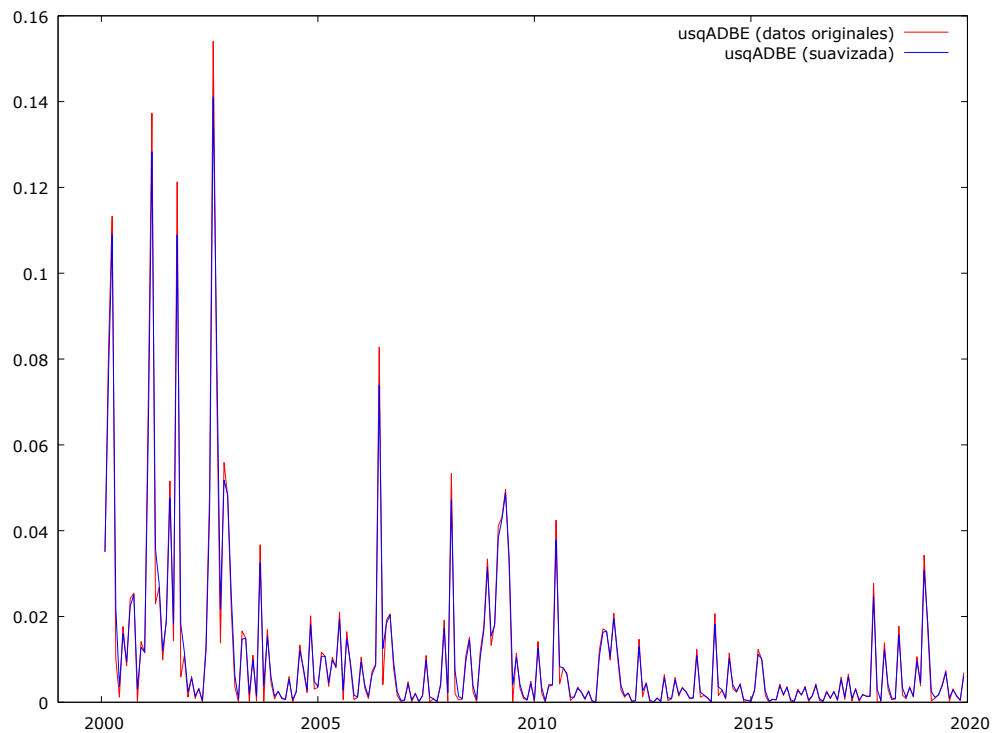


Gráfico 32: Estimación de la varianza condicional mediante EWMA para Adobe Systems. Elaboración propia

## Cartera equiponderada

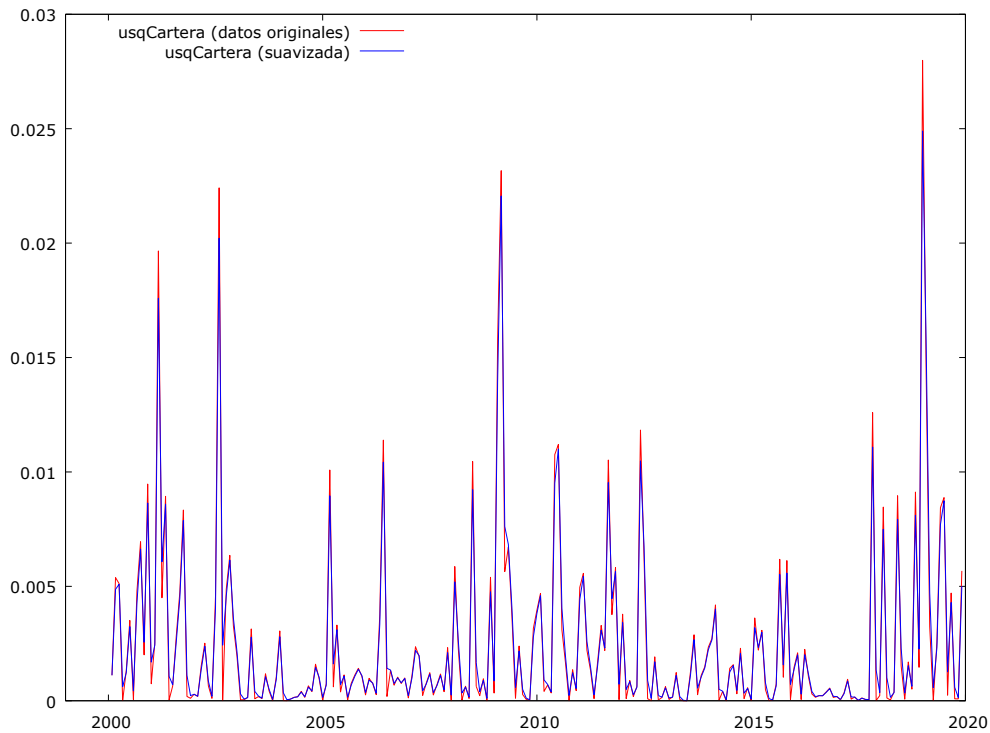


Gráfico 33: Estimación de la varianza condicional mediante EWMA para la Cartera. Elaboración propia

Se trata de estimaciones con una alta ponderación para la última observación, por lo que la predicción se ajusta bastante bien.

Aunque el EWMA es útil como predicción de la volatilidad, realmente no recoge la dependencia temporal intrínseca de la propia volatilidad.

### 4.3. Modelización GARCH y variantes

Se puede encontrar varios modelos para estimar la varianza condicional que sí recojan la dependencia temporal.

Los modelos ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity), introducidos por Engle (1982), suponen que la varianza condicional tiene una estructura autorregresiva en función de las innovaciones pasadas.

$$\sigma_{t|t-1}^2 = E(Y_t - \mu_{t|t-1})^2 | I_{t-1} = E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1}) = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$$

Para garantizar que la varianza sea positiva se debe condicionar que  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0 \forall i$ .

El problema de estos modelos es que requieren de la estimación de muchos parámetros, especialmente si el orden de retardos es grande.

Bollerslev (1986) introduce los modelos GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity), que suponen también que la varianza condicional tiene una estructura autorregresiva que depende de las innovaciones pasadas, pero además consideran que los niveles más recientes de volatilidad también influyen.

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1|t-2}^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{t-q|t-q-1}^2$$

Para garantizar que la varianza sea positiva se debe condicionar que  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , y  $\beta_i \geq 0 \forall i$ . Un GARCH(1,1) considera solo la innovación más reciente y la volatilidad más reciente, y suele ser suficiente para datos financieros, por lo que se trata de un modelo menos parsimonioso que un ARCH de órdenes superiores.

El problema de los modelos GARCH es que solo tienen en cuenta las innovaciones pasadas con signo positivo. Las series tienen también shocks negativos, y normalmente la volatilidad de las series financieras se ve más afectada por los shocks de signo negativo que por los positivos (lo que se conoce como apalancamiento).

Esta asimetría en los efectos de los shocks sí que la consideran modelos como el GJR (Glosten et al., 1993):

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i d_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q (\beta_j \sigma_{t-j|t-j-1}^2)$$

Donde  $d_t = 1$  si  $\varepsilon_t < 0$  y  $d_t = 0$  en caso contrario.

El modelo EGARCH (Exponential GARCH) (Nelson, 1991), que realmente estima el logaritmo de la varianza condicional:

$$\ln(\sigma_{t|t-1}^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1|t-2}^2) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1|t-2}^2}} + \alpha \left[ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1|t-2}^2}} - \sqrt{\frac{2}{n}} \right]$$

Donde  $\gamma$  es negativo si la relación entre los rendimientos y la volatilidad es negativa.



Para hacer una buena estimación de estos modelos también hay que saber qué distribución siguen los errores. Se van a considerar tres distribuciones: la normal, la t de Student y la t asimétrica.

Al estimar los modelos se ha comprobado que las distribuciones que siguen los errores son una t de Student para los de Bank of America y una t asimétrica para los de Adobe Systems y la Cartera. Se muestran los coeficientes y sus p-valores en las tablas siguientes. El ni es el coeficiente de la t de Student y el lambda es el que se añade para las t asimétricas.

### Modelos GARCH(1,1)

<b>Bank of America</b>	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	ni
Coeficiente	0'000284012	0'356465	0'668148	8'58377
Desviación típica	0'000184260	0'128085	0'0929797	4'10273
P-valor	0'1232	0'0054 ***	$6'67 \times 10^{-13}$ ***	0'0364 **

Tabla 17: Modelo GARCH(1,1) para Bank of America. Elaboración propia.

<b>Adobe Systems</b>	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	ni	lambda
Coeficiente	0'000232989	0'0693060	0'901749	5'48386	-0'171855
Desviación típica	0'000211895	0'0522813	0'0630100	1'92731	0'0829043
P-valor	0'2715	0'1850	$1'86 \times 10^{-46}$ ***	0'0044 ***	0'0382 **

Tabla 18: Modelo GARCH(1,1) para Adobe Systems. Elaboración propia.

<b>Cartera</b>	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	ni	lambda
Coeficiente	0'000288175	0'170992	0'727095	6'76315	-0'250019
Desviación típica	0'000238242	0'0747888	0'122429	2'37673	0'102091
P-valor	0'2264	0'0222 **	$2'87 \times 10^{-09}$ ***	0'0044 ***	0'0143 **

Tabla 19: Modelo GARCH(1,1) para la Cartera. Elaboración propia.

Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son significativos en todos los modelos excepto en el de Adobe Systems, donde  $\alpha$  no es significativo. Por tanto se puede decir que la varianza condicional depende de las innovaciones pasadas y de sus propios retardos, excepto en

el caso de Adobe Systems que solo depende de sus propios retardos. También se observa que el coeficiente de los retardos de la varianza es mayor que el de las innovaciones pasadas, por lo que influyen más los retardos que esas innovaciones.

### Modelos GJR

<b>Bank of America</b>	$\omega$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	ni
Coeficiente	0'000137330	0'130798	0'685520	0'818698	11'5765
Desviación típica	0'000145147	0'0743344	0'316182	0'0633019	6'87780
P-valor	0'3441	0'0785*	0'0301**	$2'92 \times 10^{-38}$ ***	0'0923*

Tabla 20: Modelo GJR para Bank of America. Elaboración propia.

<b>Adobe Systems</b>	$\omega$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	ni	lambda
Coeficiente	0'0013000	0'152600	0'943591	0'639709	7'06498	-0'243554
Desviación típica	0'0005828	0'076582	0'0936368	0'118820	3'45359	0'0897385
P-valor	0'0257**	0'0463**	$6'97 \times 10^{-24}$ ***	$7'29 \times 10^{-8}$ ***	0'0408**	0'0066***

Tabla 21: Modelo GJR para Adobe Systems. Elaboración propia.

<b>Cartera</b>	$\omega$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	ni	lambda
Coeficiente	0'000662020	0'0940207	0'805952	0'579666	7'71453	-0'243083
Desviación típica	0'000516117	0'0742807	0'770199	0'243740	3'47895	0'0987719
P-valor	0'1996	0'2056	0'2954	0'0174**	0'0266**	0'0139 **

Tabla 22: Modelo GJR para la Cartera. Elaboración propia.

Para Bank of America y Adobe Systems el coeficiente  $\gamma$  es significativo, lo que quiere decir que existe asimetría y este modelo es mejor que el GARCH para esas series. No ocurre lo mismo con la Cartera, que según este modelo solo los retardos de la varianza condicional influyen en la misma. Nótese que el coeficiente de  $\gamma$  es mayor que el de  $\alpha$

en todos los modelos. Un shock negativo tendría mayor efecto en la volatilidad de la serie que un shock positivo de la misma magnitud; este es el efecto apalancamiento.

### Modelos EGARCH

<b>Bank of America</b>	$\omega$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	ni
Coeficiente	-0'364685	0'238606	-0'257735	0'964065	16'6905
Desviación típica	0'0889201	0'0556580	0'0425409	0'0136748	14'9680
P-valor	$4'11 \times 10^{-5} ***$	$1'81 \times 10^{-5} ***$	$1'37 \times 10^{-9} ***$	0'0000***	0'2648

Tabla 23: Modelo EGARCH para Bank of America. Elaboración propia.

<b>Adobe Systems</b>	$\omega$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	ni	lambda
Coeficiente	-0'829734	0'283660	-0'291355	0'867890	6'55456	-0'239488
Desviación típica	0'348493	0'087414	0'140087	0'068999	2'86358	0'0878482
P-valor	0'0173**	0'0012** *	0'0375**	$2'78 \times 10^{-36} ***$	0'0221**	0'0064***

Tabla 24: Modelo EGARCH para Adobe Systems. Elaboración propia.

<b>Cartera</b>	$\omega$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	ni	lambda
Coeficiente	-2'01843	0'262929	-0'244052	0'701242	8'46961	-0'216890
Desviación típica	1'01378	0'137534	0'106523	0'168627	4'28833	0'0919120
P-valor	0'0465**	0'0559*	0'0220**	$3'20 \times 10^{-5} ***$	0'0483**	0'0183**

Tabla 25: Modelo EGARCH para la Cartera. Elaboración propia.

En los modelos EGARCH todos los coeficientes son significativos, lo que indica que existe asimetría en las tres series y los shocks tienen distinto efecto según sean positivos o negativos. Como en los GARCH no se recoge ese efecto y en el GJR no todos los coeficientes son significativos en todas las series, el mejor modelo para estimar la varianza condicional en las series es el EGARCH.

Para finalizar el estudio de la volatilidad se presentan a continuación la volatilidad original (los residuos al cuadrado de los modelos ARIMA estimados para cada serie) y la volatilidad estimada por cada uno de los modelos.

### Bank of America

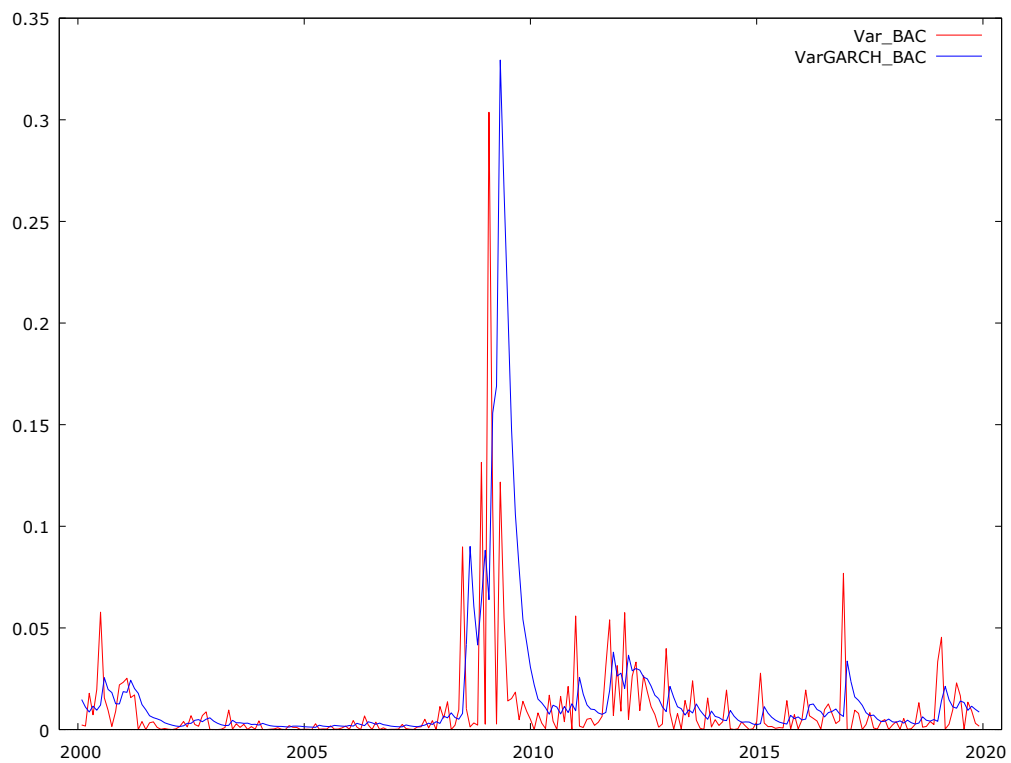


Gráfico 34: Volatilidad original y volatilidad estimada mediante GARCH para Bank of America. Elaboración propia.

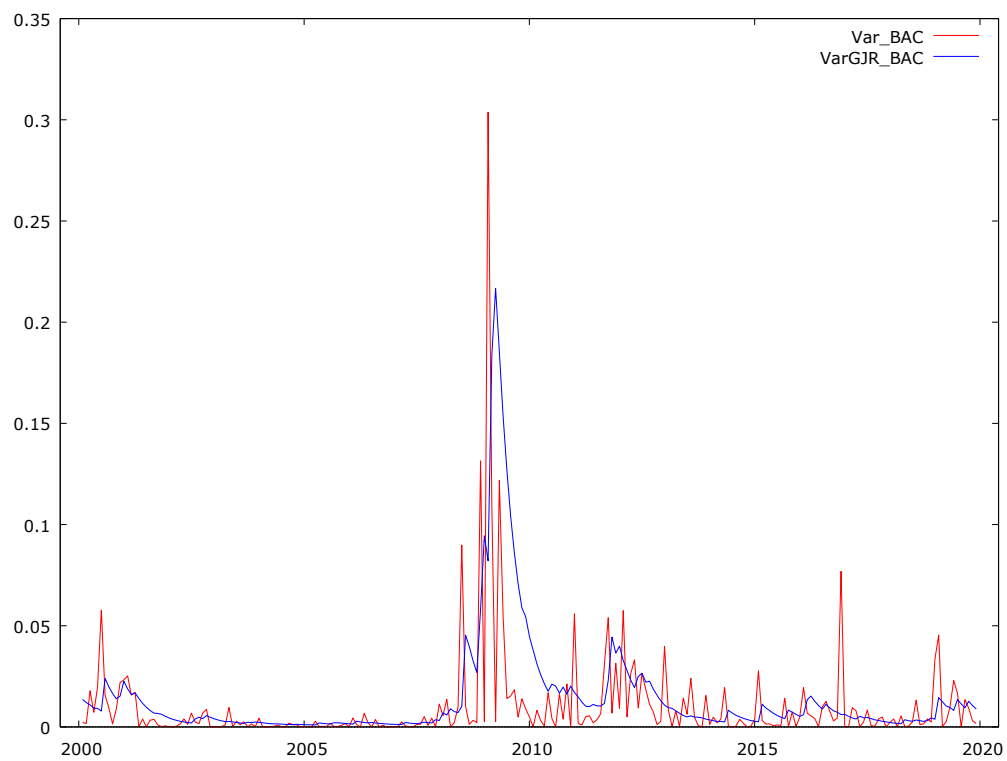


Gráfico 35: Volatilidad original y volatilidad estimada mediante GJR para Bank of America. Elaboración propia.

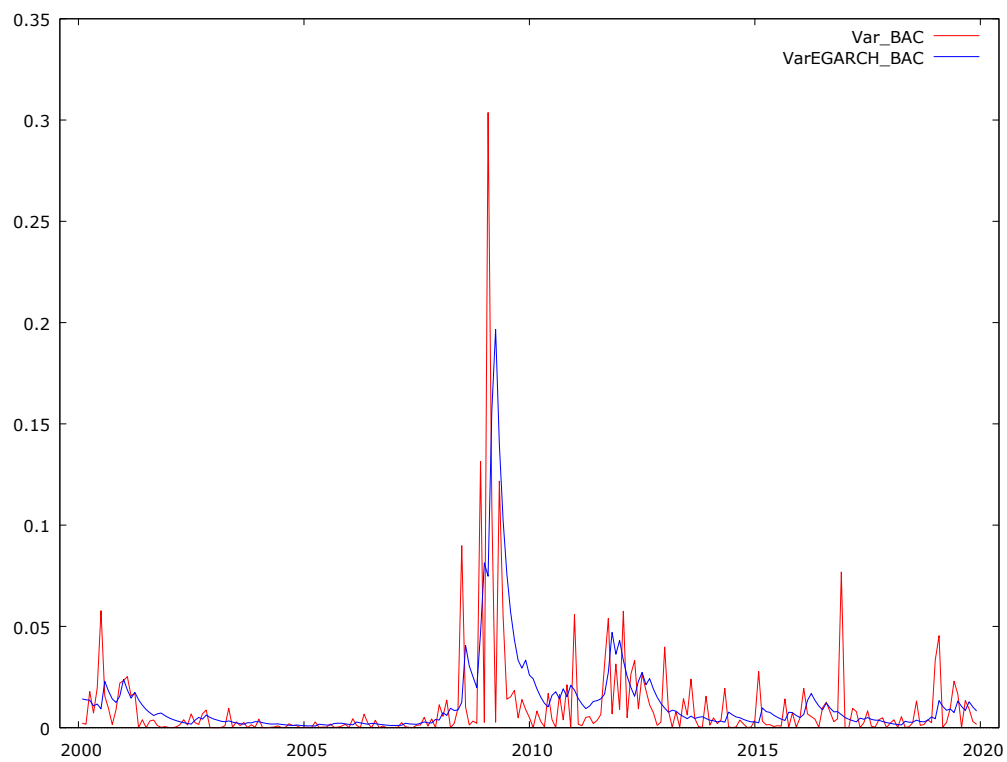


Gráfico 36: Volatilidad original y volatilidad estimada mediante EGARCH para Bank of America. Elaboración propia.

## Adobe Systems

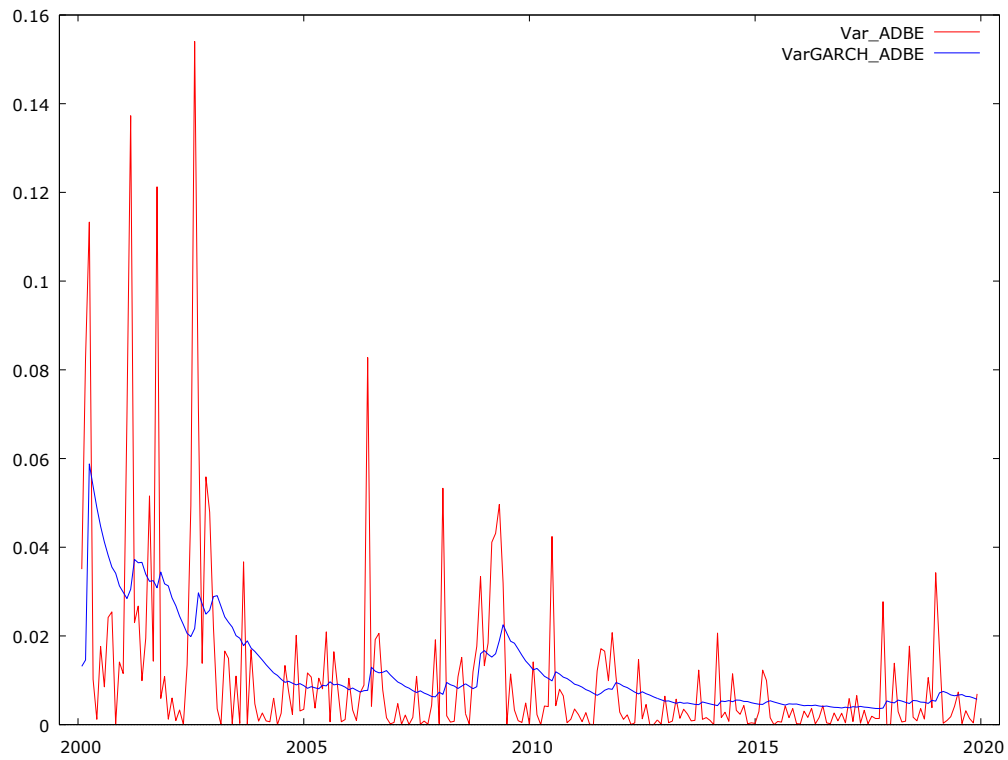


Gráfico 37: Volatilidad original y volatilidad estimada mediante GARCH para Adobe Systems. Elaboración propia.

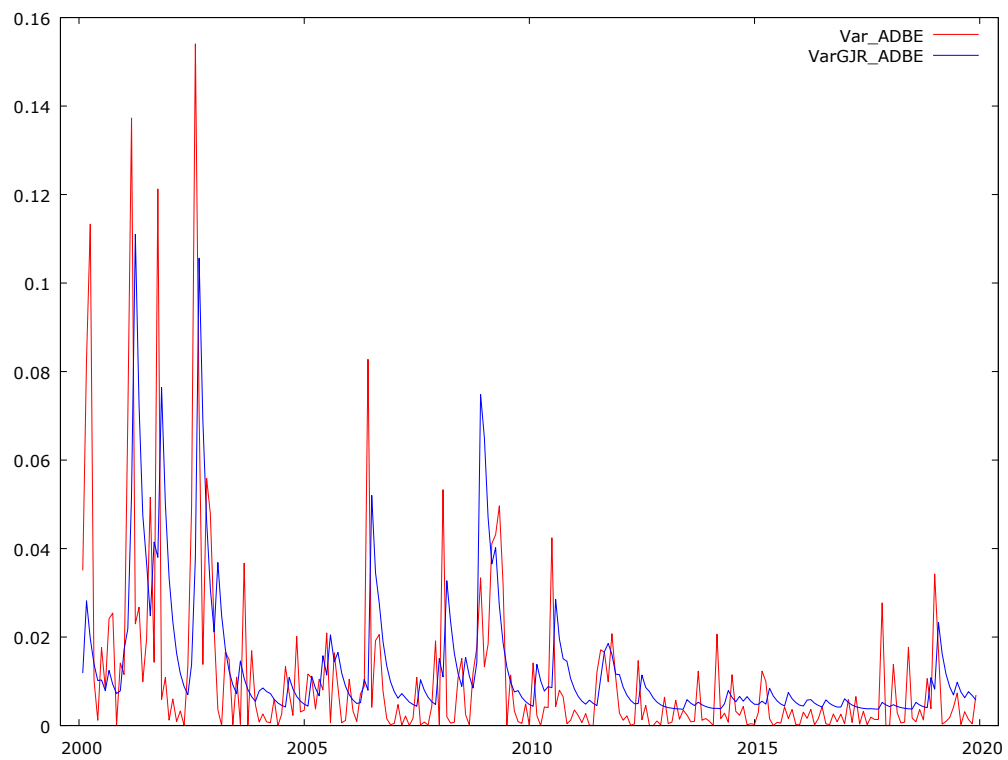


Gráfico 38: Volatilidad original y volatilidad estimada mediante GJR para Adobe Systems. Elaboración propia.

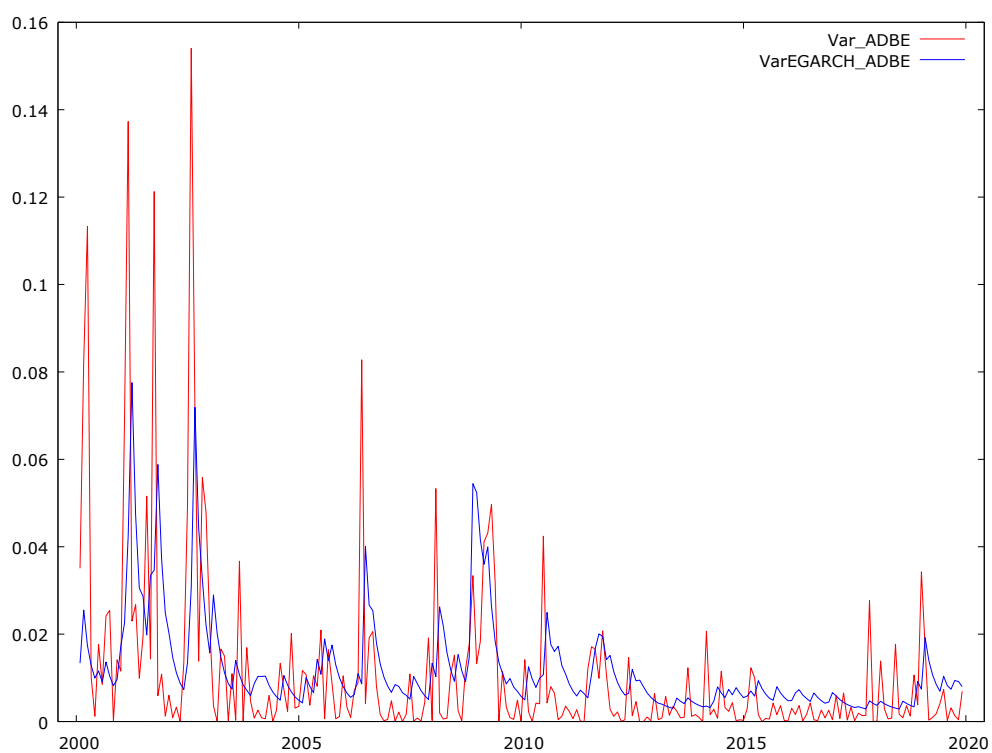


Gráfico 39: Volatilidad original y volatilidad estimada mediante EGARCH para Adobe Systems. Elaboración propia.

## Cartera

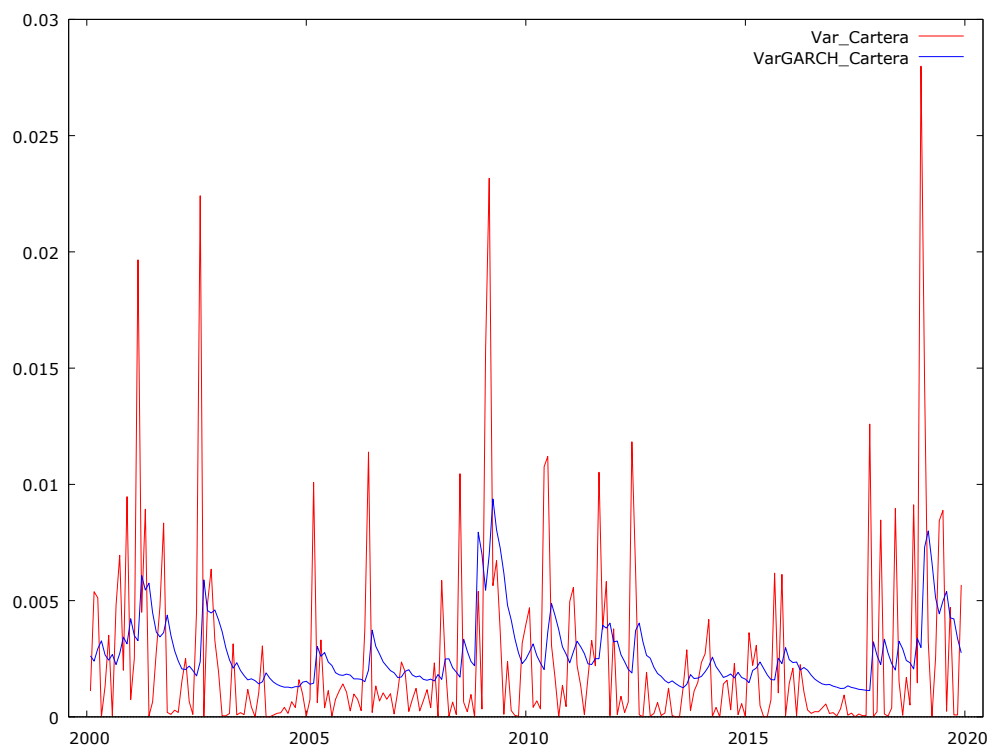


Gráfico 40: Volatilidad original y volatilidad estimada mediante GARCH para la Cartera. Elaboración propia.

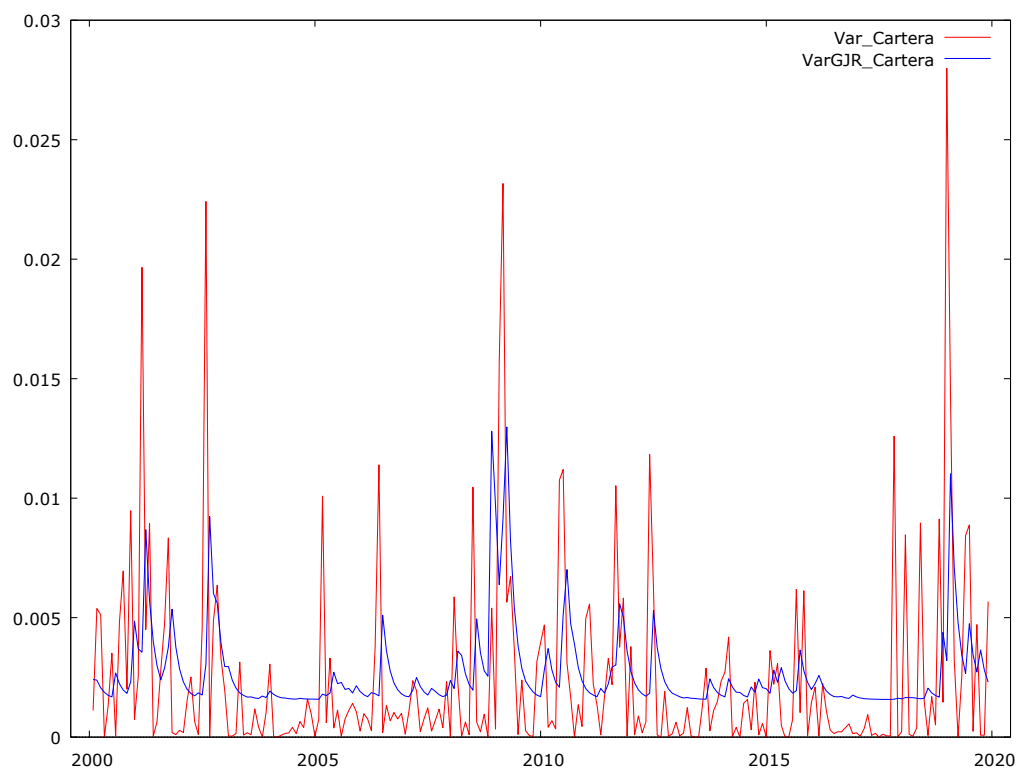


Gráfico 41: Volatilidad original y volatilidad estimada mediante GJR para la Cartera. Elaboración propia.

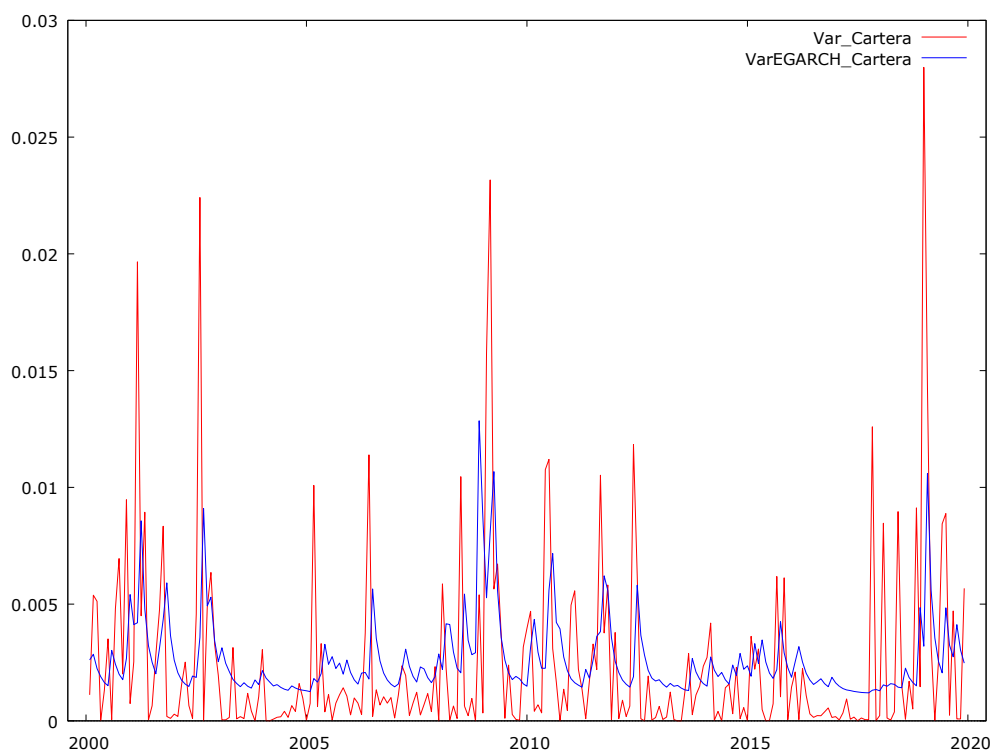


Gráfico 42: Volatilidad original y volatilidad estimada mediante EGARCH para la Cartera. Elaboración propia.



## 5. Value at Risk

La estimación y predicción de la volatilidad de una serie tiene aplicaciones muy útiles. Por ejemplo, un inversor puede estar interesado en saber cuánto puede perder si los precios de los activos que posee bajan. El Value at Risk es una medida de riesgo que indica cuál es la máxima pérdida que puede tener cierta inversión en un espacio temporal y nivel de confianza concreto.

El método histórico para calcular el Value at Risk consiste en ordenar todas las observaciones y ver cuál es el percentil del 5%.

	VaR Histórico
<i>Bank of America</i>	-15'12%
<i>ExxonMobil</i>	-8'62%
<i>Adobe Systems</i>	-16'91%
<i>Cartera</i>	-9'33%

Tabla 26: Cálculo del Value at Risk histórico. Elaboración propia.

Para la Cartera, por ejemplo, existe una probabilidad del 5% de perder al menos un 9'33% del capital invertido de un mes para otro.

Otra forma de calcularlo es asumiendo que las rentabilidades de las acciones siguen una distribución normal. Para un nivel de confianza del 95%, el cálculo del Value at Risk normal es:

$$VaR = \mu - 1'645 * \sigma_t$$

Donde  $\mu$  es la media de las rentabilidades,  $\sigma_t$  es la desviación típica esperada en t con los modelos EGARCH y  $-1'645$  es el percentil 5% de la distribución normal tipificada.

A continuación se representa el Value at Risk normal junto a las rentabilidades de cada serie.

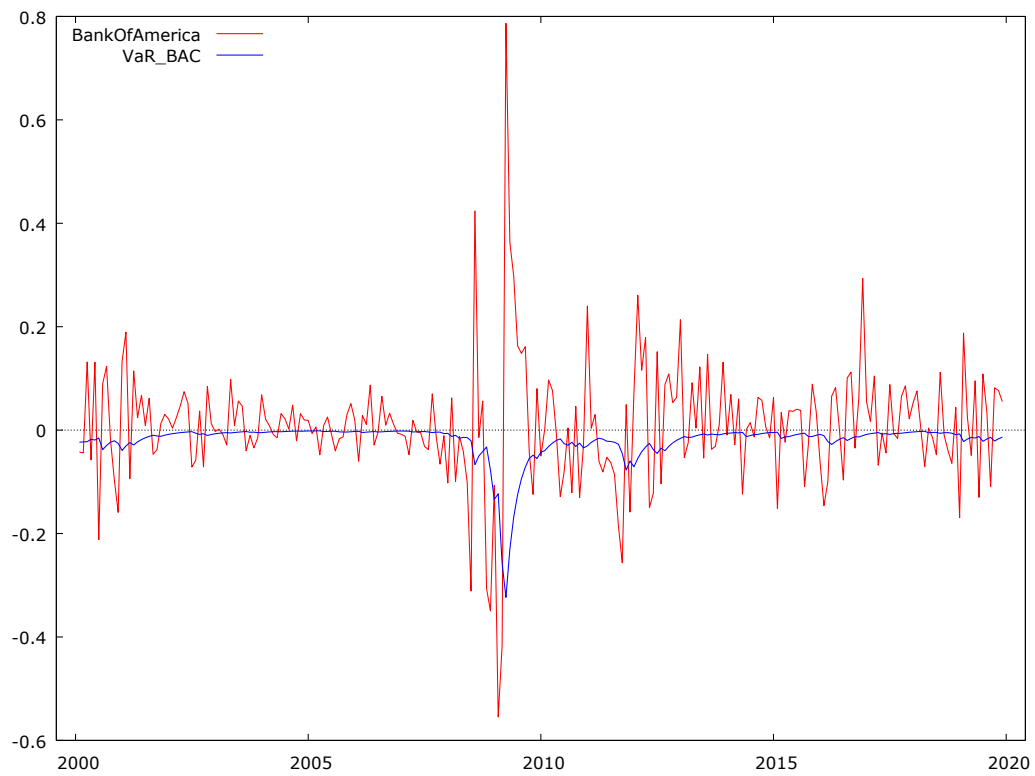


Gráfico 43: Rentabilidades y Value at Risk de Bank of America. Elaboración propia.

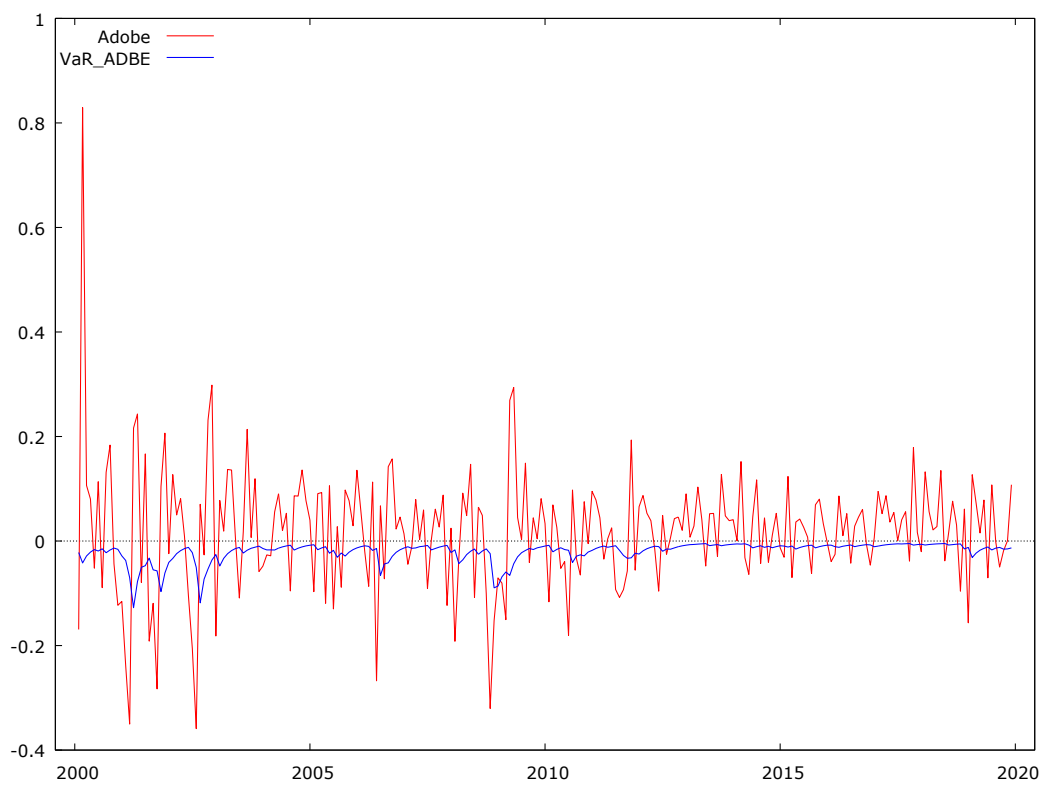


Gráfico 44: Rentabilidades y Value at Risk de Adobe Systems. Elaboración propia.

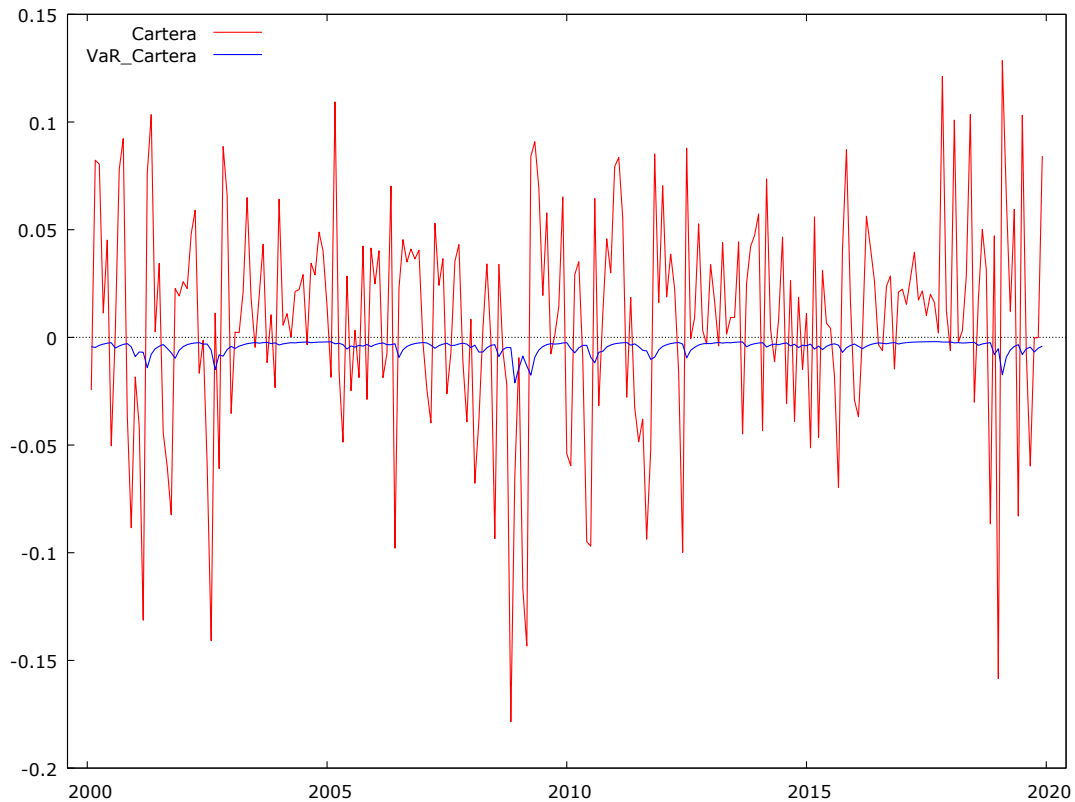


Gráfico 45: Rentabilidades y Value at Risk de la Cartera. Elaboración propia.

## 6. Cartera de mínima varianza global

La cartera que se ha analizado en este trabajo se ha formado dándole el mismo peso a cada una de las series. Distintas ponderaciones de las series forman carteras diferentes. Sabiendo ahora que hay series que tienen volatilidad, es decir, que llevan un mayor riesgo asociado, se puede construir una cartera de mínima varianza global para minimizar el riesgo asociado a la misma.

El rendimiento de una cartera es el siguiente:

$$r_c = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3$$

Donde  $w_i$  es la ponderación de la serie  $i$  en la cartera y  $r_i$  es su rendimiento. Para simplificar el cálculo se va a suponer que las tres series están incorreladas entre sí, lo que implica que su covarianza es cero. Siendo  $\mu_i$  la media de cada serie y  $\sigma_i^2$  su varianza, la media y la varianza de la cartera son:

$$\mu_c = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + w_3\mu_3$$

$$\sigma_c^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2$$

Si el objetivo es minimizar el riesgo, se tiene un problema de optimización en el que se buscan las ponderaciones  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  que minimizan la varianza de la cartera sujeto a un rendimiento de la cartera fijo:

$$\min_{w_1 w_2 w_3} \sigma_c^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2$$

$$s.a \quad \bar{\mu}_c = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + w_3\mu_3$$

Las soluciones a este problema son:

$$w_1^* = \frac{\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}}{\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\sigma_3^2}} \bar{\mu}_c$$

$$w_2^* = \frac{\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}}{\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\sigma_3^2}} \bar{\mu}_c$$

$$w_3^* = \frac{\frac{\mu_3}{\sigma_3^2}}{\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\sigma_3^2}} \bar{\mu}_c$$

Si se supone que las medias y las varianzas de las series son constantes, se pueden calcular las ponderaciones sustituyendo todos los valores en las soluciones de arriba. Los subíndices 1, 2 y 3 corresponden a Bank of America, ExxonMobil y Adobe Systems, respectivamente. La cartera de mínima varianza global sería la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'1683 \\ 0'3908 \\ 0'3967 \end{pmatrix}$$

Pero como se ha visto anteriormente que la serie de Bank of America y la de Adobe Systems presentan volatilidad y su varianza cambia con el tiempo, la cartera de mínima varianza global también debería cambiar con el tiempo. De manera que las ponderaciones dinámicas son:

$$w_{1t}^* = \frac{\frac{\mu_1}{\sigma_{1,t+1|t}^2}}{\frac{\mu_1^2}{\sigma_{1,t+1|t}^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\sigma_{3,t+1|t}^2}} \bar{\mu}_c$$

$$w_{2t}^* = \frac{\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}}{\frac{\mu_1^2}{\sigma_{1,t+1|t}^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\sigma_{3,t+1|t}^2}} \bar{\mu}_c$$

$$w_{3t}^* = \frac{\frac{\mu_3}{\sigma_{3,t+1|t}^2}}{\frac{\mu_1^2}{\sigma_{1,t+1|t}^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\sigma_{3,t+1|t}^2}} \bar{\mu}_c$$

Con estas ponderaciones dinámicas se puede calcular el conjunto de carteras de mínima varianza global. Para su cálculo se considera que la varianza condicional de Bank of America y Adobe Systems se comporta como un GARCH(1,1). Como la frecuencia de las series es mensual, se obtienen carteras distintas para cada mes desde el 1 de enero del 2000 al 31 de diciembre del 2019, representadas en el siguiente gráfico:

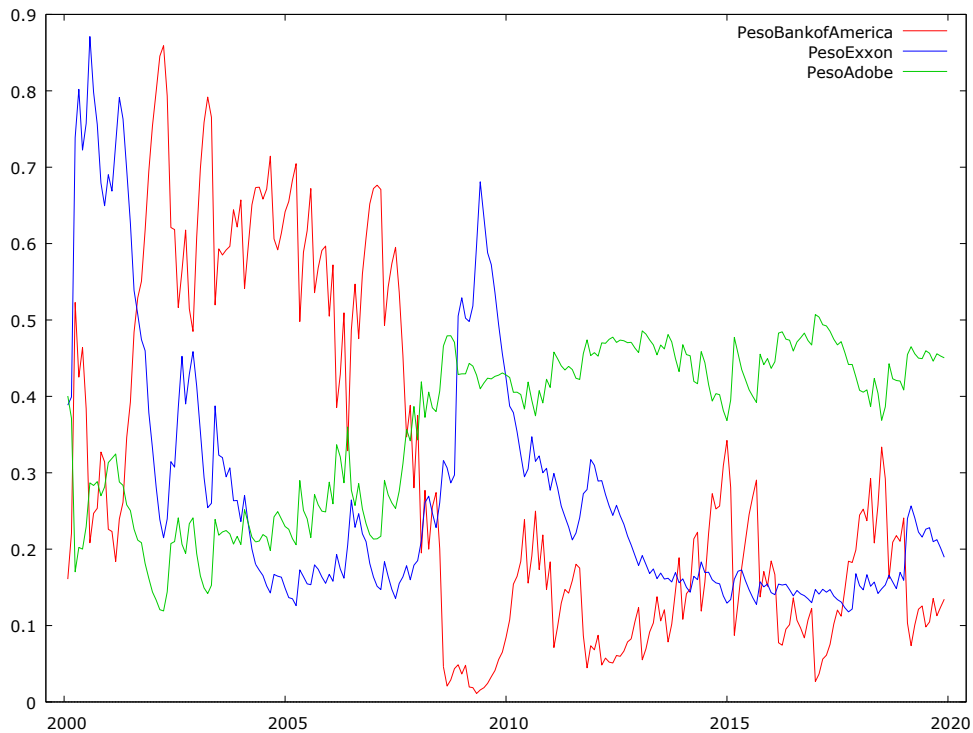


Gráfico 46: Pesos de cada serie en la Cartera de mínima varianza global. Elaboración propia.

Como se puede observar los pesos de cada serie van cambiando con el tiempo para minimizar el riesgo de la cartera. También se observa que la suma de los pesos no siempre es 1. Esto se debe a que en el problema de optimización no se ha impuesto esa restricción. Para alcanzar las combinaciones de carteras cuyos pesos sumen más de 1 sería necesario invertir más capital, mientras que en aquellas carteras cuyos pesos no lleguen a sumar 1 no se invertiría todo el capital.

## 7. Conclusiones

Del análisis de las series de rentabilidades se extraen varias conclusiones. En primer lugar, los modelos que en un principio mejor se ajustaban a las series han resultado no ser los mejores al considerar los valores atípicos. En el caso de Bank of America el MA(8) pasaba a ser un MA(1) al incluir los valores atípicos en el modelo, y en el caso de Adobe Systems el ARMA(2,2) pasaba a ser un ARMA(1,1). Esto recalca la importancia de comprobar si existen valores atípicos que puedan influir en el comportamiento de las series.

En segundo lugar, tres de las cuatro series del estudio presentan volatilidad, por lo que suponer que la varianza condicional es constante en series financieras puede no ser un supuesto realista. La volatilidad está relacionada con el riesgo de una inversión y por eso es importante encontrar un modelo adecuado para estimarla. De los que se han considerado en este análisis el mejor es el modelo EGARCH, ya que tiene en cuenta la asimetría de los shocks que influyen sobre las series.

Por último, las medidas de riesgo como el Value at Risk o la formación de una cartera de mínima varianza global deben tener en cuenta la varianza condicional de las series para ser más precisas. Como la varianza condicional cambia con el tiempo estas medidas también van a ser dinámicas, y un buen inversor debe tener en cuenta esas dinámicas para minimizar su exposición al riesgo. Esta idea es evidente al calcular el conjunto de carteras de mínima varianza global y ver que las ponderaciones varían tanto a lo largo del periodo temporal de estudio.

## 8. Anexo

### 8.1. Análisis de la estacionariedad en media

Para realizar los contrastes de Dickey Fuller Aumentado se consideran los siguientes modelos:

- (1)  $\Delta Y_t = \varphi^* Y_{t-1} + \sum_{k=i}^p \alpha_k \Delta Y_{t-k} + \varepsilon_t$  (sin constante ni tendencia)
- (2)  $\Delta Y_t = \mu + \varphi^* Y_{t-1} + \sum_{k=i}^p \alpha_k \Delta Y_{t-k} + \varepsilon_t$  (con constante y sin tendencia)
- (3)  $\Delta Y_t = \mu + \beta t + \varphi^* Y_{t-1} + \sum_{k=i}^p \alpha_k \Delta Y_{t-k} + \varepsilon_t$  (con constante y tendencia)
- (4)  $\Delta Y_t = \mu + \beta t + \gamma t^2 + \varphi^* Y_{t-1} + \sum_{k=i}^p \alpha_k \Delta Y_{t-k} + \varepsilon_t$  (con constante y tendencia cuadrática)

En todos se contrasta  $H_0: \varphi^* = 0$  con  $H_1: \varphi^* \neq 0$

Como la frecuencia de la serie es mensual se han elegido doce retardos ( $k = 12$ ).

Ya que la constante no es significativa en ningún modelo y la tendencia temporal tampoco, con estimar el modelo (1) es suficiente. Ese es el modelo que se muestra en la correspondiente sección del trabajo.

### 8.2. Modelización

#### Bank of America

El correlograma de la serie tiene varias correlaciones significativas (el gráfico está en la correspondiente sección del trabajo). Así que se va a buscar un modelo que deje el correlograma lo más parecido posible al de un ruido blanco, es decir, sin ninguna correlación significativa.

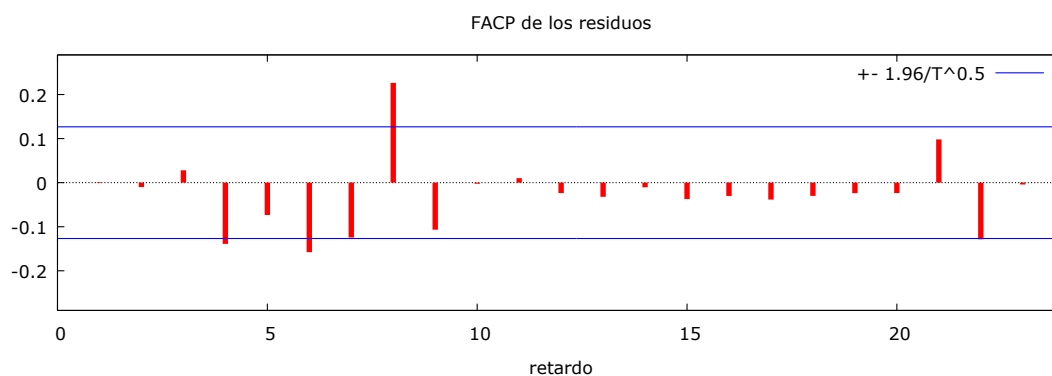
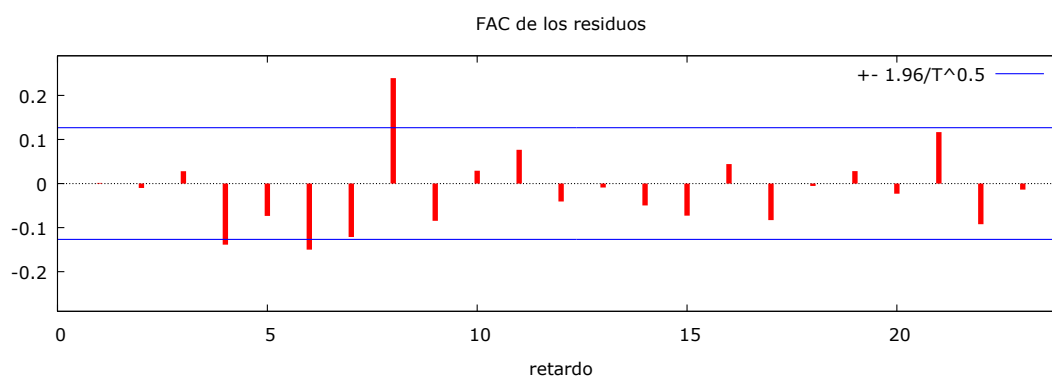
Empezando con un AR(1)

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00841795	0.00866395	0.9716	0.3312	
phi_1	0.119669	0.0641137	1.867	0.0620	*

Media de la vble. dep.	0.008420	D.T. de la vble. dep.	0.119089
media innovaciones	0.000025	D.T. innovaciones	0.117980
Log-verosimilitud	171.6672	Criterio de Akaike	-337.3345
Criterio de Schwarz	-326.9051	Crit. de Hannan-Quinn	-333.1317

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
AR				
Raíz 1	8.3564	0.0000	8.3564	0.0000

Para este modelo el retardo es significativo y la raíz es mayor que la unidad, por lo que sería estacionario, pero el correlograma de los residuos se parece mucho al correlograma de la serie original y tiene algunas correlaciones significativas:



Si se siguen añadiendo retardos, es necesario llegar a un AR(4) para obtener un retardo significativo:

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00842793	0.00748152	1.126	0.2600	
phi_1	0.122521	0.0638182	1.920	0.0549	*
phi_2	-0.0113125	0.0639651	-0.1769	0.8596	
phi_3	0.0299199	0.0643771	0.4648	0.6421	
phi_4	-0.150947	0.0638826	-2.363	0.0181	**



Media de la vble. dep.	0.008420	D.T. de la vble. dep.	0.119089
media innovaciones	-0.000013	D.T. innovaciones	0.116593
Log-verosimilitud	174.4463	Criterio de Akaike	-336.8926
Criterio de Schwarz	-316.0338	Crit. de Hannan-Quinn	-328.4870

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
AR				
Raíz 1	1.1770	-1.0595	1.5836	-0.1167
Raíz 2	1.1770	1.0595	1.5836	0.1167
Raíz 3	-1.0779	-1.2164	1.6253	-0.3654
Raíz 4	-1.0779	1.2164	1.6253	0.3654

El correlograma de este modelo es muy similar al del AR(1), y comparando los criterios de información, el AR(1) sería mejor.

Empezando con un MA(1)

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00841887	0.00855364	0.9842	0.3250	
theta_1	0.121423	0.0647011	1.877	0.0606	*

Media de la vble. dep.	0.008420	D.T. de la vble. dep.	0.119089
media innovaciones	0.000019	D.T. innovaciones	0.117972
Log-verosimilitud	171.6838	Criterio de Akaike	-337.3677
Criterio de Schwarz	-326.9383	Crit. de Hannan-Quinn	-333.1649

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
MA				
Raíz 1	-8.2357	0.0000	8.2357	0.5000

En este modelo el retardo es significativo y la raíz imaginaria tiene un módulo mayor que la unidad, por lo que sería invertible, pero el correlograma de los residuos se parece mucho al de la serie original y tiene algunas correlaciones significativas. Si se siguen añadiendo retardos, es necesario llegar hasta el MA(5) para tener alguno significativo.

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00837090	0.00618144	1.354	0.1757	
theta_1	0.0830761	0.0661127	1.257	0.2089	
theta_2	-0.0681349	0.0685121	-0.9945	0.3200	
theta_3	0.0682543	0.0814811	0.8377	0.4022	
theta_4	-0.109354	0.0588745	-1.857	0.0633	*
theta_5	-0.156810	0.0802776	-1.953	0.0508	*

Media de la vble. dep.	0.008420	D.T. de la vble. dep.	0.119089
media innovaciones	3.21e-08	D.T. innovaciones	0.116311
Log-verosimilitud	174.9820	Criterio de Akaike	-335.9640
Criterio de Schwarz	-311.6288	Crit. de Hannan-Quinn	-326.1576

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
MA				
Raíz 1	-1.3821	0.6811	1.5409	0.4271
Raíz 2	-1.3821	-0.6811	1.5409	-0.4271
Raíz 3	1.3753	0.0000	1.3753	0.0000
Raíz 4	0.3458	-1.3540	1.3975	-0.2102
Raíz 5	0.3458	1.3540	1.3975	0.2102

En este modelo empeoran los criterios de información en comparación con el MA(1).

Ahora se va a probar con modelos ARMA. Empezando con el ARMA(1,1) y subiendo un grado en cada parte, es necesario llegar al ARMA(2,3) para tener algún retardo significativo.

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00860304	0.00867787	0.9914	0.3215	
phi_1	-1.45151	0.00541099	-268.3	<0.0001	***
phi_2	-0.999526	0.00119784	-834.4	<0.0001	***
theta_1	1.63613	0.0669992	24.42	<0.0001	***
theta_2	1.27577	0.0978852	13.03	<0.0001	***
theta_3	0.190801	0.0645653	2.955	0.0031	***

Media de la vble. dep.	0.008420	D.T. de la vble. dep.	0.119089
media innovaciones	-0.000071	D.T. innovaciones	0.112920
Log-verosimilitud	179.6239	Criterio de Akaike	-345.2478
Criterio de Schwarz	-320.9126	Crit. de Hannan-Quinn	-335.4414

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
AR				
Raíz 1	-0.7261	-0.6879	1.0002	-0.3793
Raíz 2	-0.7261	0.6879	1.0002	0.3793
MA				
Raíz 1	-0.7227	0.6912	1.0000	0.3785
Raíz 2	-0.7227	-0.6912	1.0000	-0.3785
Raíz 3	-5.2411	0.0000	5.2411	0.5000

Pero el modelo tiene dos raíces MA iguales a uno, por lo que no sería estacionario. Este modelo no se corresponde con la serie.

Tras estas pruebas se puede pensar que el modelo adecuado es un AR(1) o el MA(1). Pero en estos modelos los residuos tienen un correlograma muy similar al de la serie original, en el que al menos cuatro correlaciones son significativas, cuando un modelo que se ajustara bien a la serie no debería tener ninguna correlación en los residuos significativa (porque debe parecerse cuánto más posible a un ruido blanco).

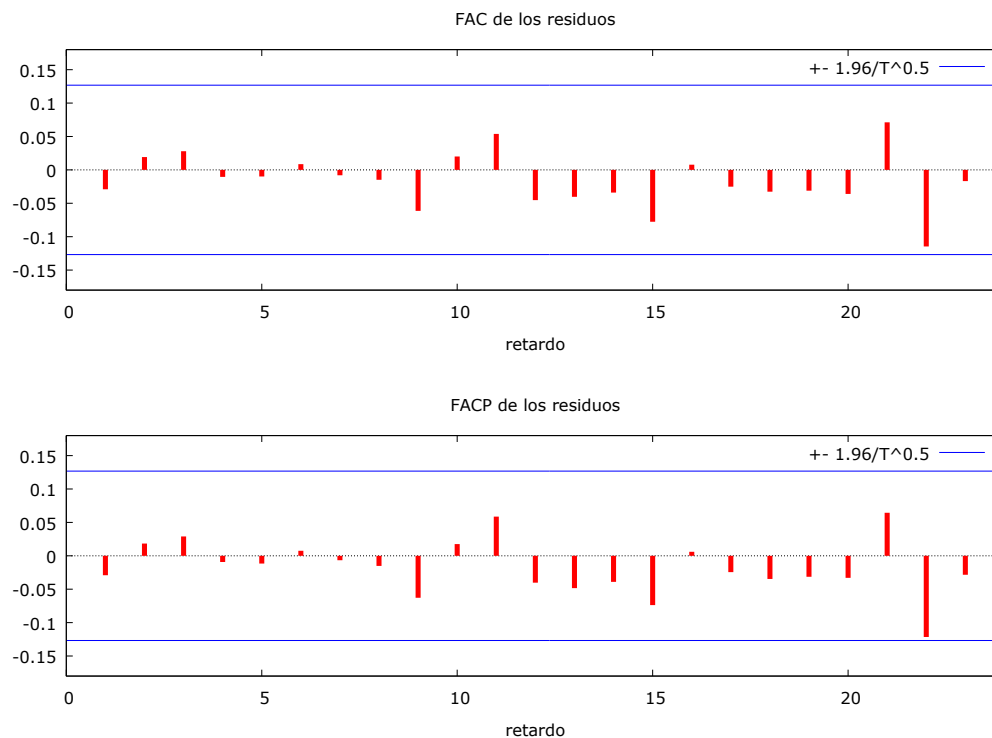
Visto que la octava correlación en la serie original es muy significativa y a partir de ahí todas disminuyen, se va a probar con un MA(8). Porque en un MA(p) teórico las correlaciones se anulan para  $i > p$ , así que el MA(8) podría ajustarse bien a la serie.

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00848935	0.00619036	1.371	0.1703	
theta_1	0.170688	0.0635167	2.687	0.0072	***
theta_2	-0.0154699	0.0630574	-0.2453	0.8062	
theta_3	-0.0287198	0.0677464	-0.4239	0.6716	
theta_4	-0.108131	0.0654439	-1.652	0.0985	*
theta_5	-0.0791731	0.0703787	-1.125	0.2606	
theta_6	-0.183809	0.0688503	-2.670	0.0076	***
theta_7	-0.151768	0.0690348	-2.198	0.0279	**
theta_8	0.258399	0.0779366	3.316	0.0009	***
Media de la vble. dep.	0.008420	D.T. de la vble. dep.		0.119089	
media innovaciones	-0.000189	D.T. innovaciones		0.110526	
Log-verosimilitud	186.7318	Criterio de Akaike		-353.4637	
Criterio de Schwarz	-318.6990	Crit. de Hannan-Quinn		-339.4545	

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
MA				
Raíz 1	-0.4343	1.0344	1.1219	0.3133
Raíz 2	-0.4343	-1.0344	1.1219	-0.3133
Raíz 3	1.3198	0.2714	1.3474	0.0323
Raíz 4	1.3198	-0.2714	1.3474	-0.0323
Raíz 5	-1.0624	-0.3989	1.1348	-0.4428
Raíz 6	-1.0624	0.3989	1.1348	0.4428
Raíz 7	0.4705	-1.0459	1.1468	-0.1827
Raíz 8	0.4705	1.0459	1.1468	0.1827

Aunque no todos los retardos sean significativos, la mayoría sí lo son. Además, el módulo de todas las raíces imaginarias es mayor que uno y por tanto se trata de un MA invertible. El correlograma que presentan los residuos de este modelo no contiene

ninguna significativa, es el que más se parece a un ruido blanco de todos los modelos propuestos:



Además, si se comparan los criterios de información de este modelo con los del AR(1) o el MA(1), el de Akaike y el de Hannan-Quinn mejoran en el MA(8). Por estas razones se ha decidido que el modelo que mejor se ajusta a la serie es el MA(8). Aunque se han quitado los retardos que no son significativos, quedando el MA(8) así:

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00860120	0.00795603	1.081	0.2797	
theta_1	0.178788	0.0613919	2.912	0.0036	***
theta_6	-0.173721	0.0626463	-2.773	0.0056	***
theta_7	-0.162334	0.0663548	-2.446	0.0144	**
theta_8	0.263598	0.0707978	3.723	0.0002	***

Media de la vble. dep.	0.008420	D.T. de la vble. dep.	0.119089
media innovaciones	-0.000154	D.T. innovaciones	0.111214
Log-verosimilitud	185.2321	Criterio de Akaike	-358.4643
Criterio de Schwarz	-337.6055	Crit. de Hannan-Quinn	-350.0588

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
MA				
Raíz 1	-1.0585	-0.4047	1.1333	-0.4419
Raíz 2	-1.0585	0.4047	1.1333	0.4419
Raíz 3	1.2971	-0.3841	1.3528	-0.0458
Raíz 4	1.2971	0.3841	1.3528	0.0458
Raíz 5	0.5078	-1.0308	1.1490	-0.1772
Raíz 6	0.5078	1.0308	1.1490	0.1772
Raíz 7	-0.4384	-1.0151	1.1057	-0.3149
Raíz 8	-0.4384	1.0151	1.1057	0.3149

### ExxonMobil Corporation

El correlograma de la serie parece el de un ruido blanco ya que ninguna es significativa y no se aprecia estructura alguna. Igualmente se han considerado varios modelos.

Este es el ruido blanco y sus criterios:

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>
const	0.00357703	0.00329482	1.086	0.2776
Media de la vble. dep.	0.003577	D.T. de la vble. dep.		0.050937
media innovaciones	0.000000	D.T. innovaciones		0.050937
Log-verosimilitud	372.9187	Criterio de Akaike		-741.8374
Criterio de Schwarz	-734.8845	Crit. de Hannan-Quinn		-739.0355

Un MA(1) no es un buen modelo porque los criterios empeoran un poco y el retardo no es significativo.

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>
const	0.00356655	0.00297841	1.197	0.2311
theta_1	-0.0918957	0.0666444	-1.379	0.1679
Media de la vble. dep.	0.003577	D.T. de la vble. dep.		0.050937
media innovaciones	0.000014	D.T. innovaciones		0.050640
Log-verosimilitud	373.8131	Criterio de Akaike		-741.6261
Criterio de Schwarz	-731.1967	Crit. de Hannan-Quinn		-737.4234

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
MA				
Raíz 1	10.8819	0.0000	10.8819	0.0000

Lo mismo ocurre con un AR(1):

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>
const	0.00368468	0.00330735	1.114	0.2652
phi_1	-0.0820347	0.0647706	-1.267	0.2053
Media de la vble. dep.	0.003391	D.T. de la vble. dep.		0.050962
media innovaciones	0.000000	D.T. innovaciones		0.050897
Log-verosimilitud	372.0473	Criterio de Akaike		-740.0946
Criterio de Schwarz	-733.1500	Crit. de Hannan-Quinn		-737.2958

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
AR				
Raíz 1	-12.1900	0.0000	12.1900	0.5000

En otros modelos no se encuentran retardos significativos, así que esta serie es un ruido blanco.

## Adobe Systems

En el correlograma de la serie hay una correlación significativa, así que se va a buscar un modelo que pueda dejarlo más parecido al de un ruido blanco.

El ruido blanco es el siguiente:

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.0186919	0.00747626	2.500	0.0124	**
Media de la vble. dep.	0.018692	D.T. de la vble. dep.		0.115580	
media innovaciones	0.000000	D.T. innovaciones		0.115580	
Log-verosimilitud	177.0866	Criterio de Akaike		-350.1732	
Criterio de Schwarz	-343.2203	Crit. de Hannan-Quinn		-347.3714	

Empezando con un MA(1), el coeficiente no es significativo.

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.0186807	0.00762862	2.449	0.0143	**
theta_1	0.0228784	0.0626903	0.3649	0.7152	

Media de la vble. dep.	0.018692	D.T. de la vble. dep.	0.115580
media innovaciones	0.000019	D.T. innovaciones	0.115306
Log-verosimilitud	177.1523	Criterio de Akaike	-348.3047
Criterio de Schwarz	-337.8753	Crit. de Hannan-Quinn	-344.1019

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
MA				
Raíz 1	-43.7093	0.0000	43.7093	0.5000

Lo mismo ocurre con un AR(1):

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.0186816	0.00764223	2.445	0.0145	**
phi_1	0.0242489	0.0650293	0.3729	0.7092	

Media de la vble. dep.	0.018692	D.T. de la vble. dep.	0.115580
media innovaciones	0.000019	D.T. innovaciones	0.115304
Log-verosimilitud	177.1562	Criterio de Akaike	-348.3125
Criterio de Schwarz	-337.8831	Crit. de Hannan-Quinn	-344.1097

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
AR				
Raíz 1	41.2390	0.0000	41.2390	0.0000

Los MA o AR de más grados tampoco son significativos. Sí que se encuentra un modelo con retardos significativos en el ARMA(2,2):

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.0187813	0.00817300	2.298	0.0216	**
phi_1	0.639634	0.256024	2.498	0.0125	**
phi_2	-0.771360	0.150108	-5.139	<0.0001	***
theta_1	-0.578110	0.226119	-2.557	0.0106	**
theta_2	0.833472	0.111123	7.500	<0.0001	***

Media de la vble. dep.	0.018692	D.T. de la vble. dep.	0.115580
media innovaciones	0.000032	D.T. innovaciones	0.113877
Log-verosimilitud	180.0517	Criterio de Akaike	-348.1035
Criterio de Schwarz	-327.2447	Crit. de Hannan-Quinn	-339.6980

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
AR				
Raíz 1	0.4146	-1.0604	1.1386	-0.1907
Raíz 2	0.4146	1.0604	1.1386	0.1907
MA				
Raíz 1	0.3468	-1.0390	1.0954	-0.1987

Raíz 2	0.3468	1.0390	1.0954	0.1987
--------	--------	--------	--------	--------

Lo cierto es que este modelo en el que todos los retardos son significativos también deja muy bien el correlograma de los residuos, pero empeora en los criterios. En este caso he decidido darle prioridad al correlograma más similar a un ruido blanco, por lo que opto por el modelo ARMA(2,2) para la serie. Como en la siguiente sección se controlan los valores atípicos puede que este no sea el modelo definitivo.

### Cartera equiponderada

El correlograma de la serie parece el de un ruido blanco ya que ninguna es significativa y no se aprecia estructura alguna. Igualmente se han considerado varios modelos.

Este es el ruido blanco y sus criterios:

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00810833	0.00330447	2.454	0.0141	**
Media de la vble. dep.	0.008108	D.T. de la vble. dep.		0.051086	
media innovaciones	0.000000	D.T. innovaciones		0.051086	
Log-verosimilitud	372.2200	Criterio de Akaike		-740.4399	
Criterio de Schwarz	-733.4870	Crit. de Hannan-Quinn		-737.6381	

Empezando con un MA(1), el retardo no es significativo:

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00811722	0.00361889	2.243	0.0249	**
theta_1	0.0525202	0.0531541	0.9881	0.3231	
Media de la vble. dep.	0.008108	D.T. de la vble. dep.		0.051086	
media innovaciones	7.53e-06	D.T. innovaciones		0.050911	
Log-verosimilitud	372.5394	Criterio de Akaike		-739.0788	
Criterio de Schwarz	-728.6494	Crit. de Hannan-Quinn		-734.8761	

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
MA				
Raíz 1	-19.0403	0.0000	19.0403	0.5000



Ocurre lo mismo con un AR(1):

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00784559	0.00335691	2.337	0.0194	**
phi_1	0.0513168	0.0652599	0.7863	0.4317	
Media de la vble. dep.	0.008245	D.T. de la vble. dep.		0.051150	
media innovaciones	0.000000	D.T. innovaciones		0.051191	
Log-verosimilitud	370.6795	Criterio de Akaike		-737.3591	
Criterio de Schwarz	-730.4145	Crit. de Hannan-Quinn		-734.5603	

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
AR				
Raíz 1	19.4868	0.0000	19.4868	0.0000

Tampoco son significativos los modelos de órdenes superiores ya sean MA o AR. En el caso de modelos ARMA, sí que se encuentra uno con retardos significativos: ARMA(2,2).

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00636130	0.00286456	2.221	0.0264	**
phi_1	1.01170	0.0362463	27.91	<0.0001	***
phi_2	-0.837778	0.0361133	-23.20	<0.0001	***
theta_1	-1.05131	0.0327010	-32.15	<0.0001	***
theta_2	0.913627	0.0322589	28.32	<0.0001	***
Media de la vble. dep.	0.007933	D.T. de la vble. dep.		0.051030	
media innovaciones	0.000028	D.T. innovaciones		0.049695	
Log-verosimilitud	375.1506	Criterio de Akaike		-738.3013	
Criterio de Schwarz	-717.4929	Crit. de Hannan-Quinn		-729.9142	

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
AR				
Raíz 1	0.6038	-0.9105	1.0925	-0.1568
Raíz 2	0.6038	0.9105	1.0925	0.1568
MA				
Raíz 1	0.5754	-0.8738	1.0462	-0.1573
Raíz 2	0.5754	0.8738	1.0462	0.1573

Pero este modelo tiene peores criterios que el del ruido blanco y además aumenta el valor de las correlaciones (que no llegan a ser significativas, pero hace que el correlograma del ruido blanco sea mejor), por lo que he decidido quedarme con el ruido blanco.

### 8.3.Valores atípicos

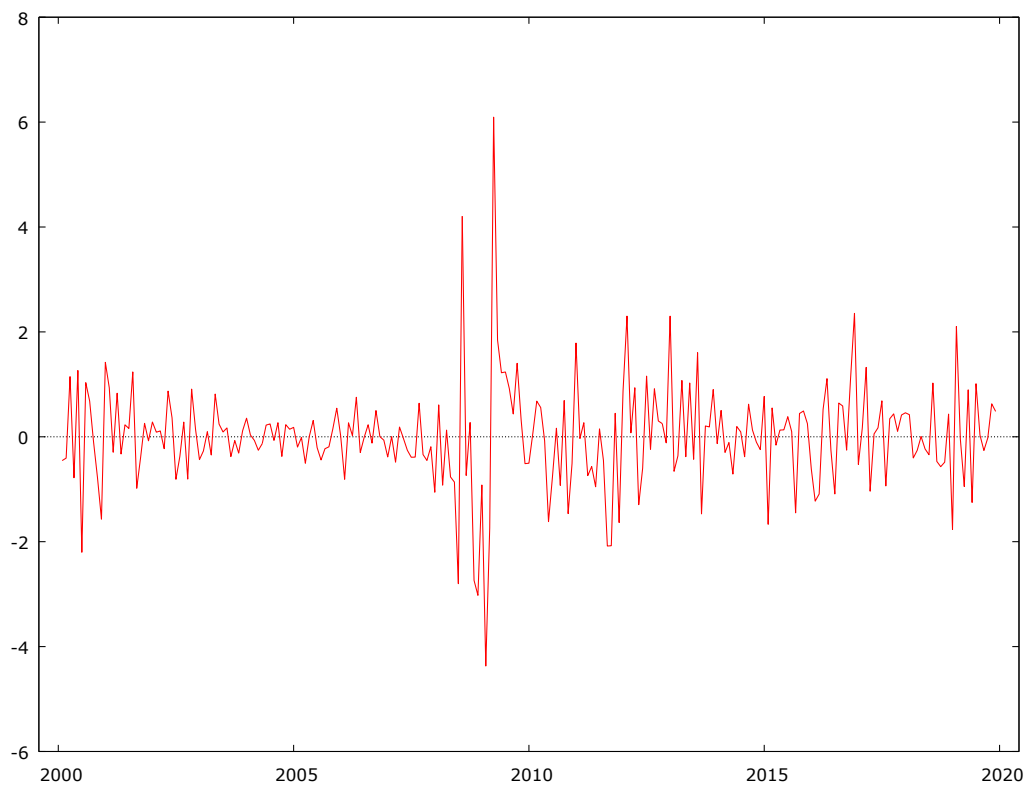
#### Bank of America

Estadísticos descriptivos de los residuos del MA(8):

Estadísticos principales, usando las observaciones 2000:01 - 2019:12  
para la variable uhatBAC (239 observaciones válidas)

Media	Mediana	Mínimo	Máximo
-0.00015434	0.00049982	-0.48857	0.68087
Desv. Típica.	C.V.	Asimetría	Exc. de curtosis
0.11175	724.02	0.66935	7.8937
Porc. 5%	Porc. 95%	Rango IQ	Observaciones ausentes
-0.18097	0.14771	0.096765	1

La normalización que se hace es  $\text{ResiduosEstandarizados} = (r - (-0.00015434)) / 0.11175$   
siendo r los residuos (uhatBAC).



Se añaden como variables binarias puntuales diferenciadas los tres valores atípicos localizados:

(2008:08) Agosto de 2008: 4'206 (binaria)

(2009:02) Febrero de 2009: -4'37 (binaria2)

(2009:04) Abril de 2009: 6'094 (binaria3)

Se añaden también los mismos valores como variables binarias permanentes, es decir, que a partir del valor atípico son 1 (perm1, perm2, perm3). Se añaden también como variables binarias que recogen los efectos de más de un mes (por ejemplo, atip1 vale 1 desde agosto de 2008 a octubre de 2008).

Probando a estimar el MA(8) con algunas de estas variables, resulta que hay dos que son significativas:

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00540924	0.00715147	0.7564	0.4494	
theta_1	0.161880	0.0591001	2.739	0.0062	***
theta_6	-0.171450	0.0744030	-2.304	0.0212	**
theta_7	-0.0347352	0.0710569	-0.4888	0.6250	
theta_8	0.165902	0.0704599	2.355	0.0185	**
d_atip1BAC	0.309343	0.0747930	4.136	<0.0001	***
d_perm3BAC	0.743627	0.0989599	7.514	<0.0001	***

Media de la vble. dep.	0.008420	D.T. de la vble. dep.	0.119089
media innovaciones	-0.000121	D.T. innovaciones	0.098472
Log-verosimilitud	214.6464	Criterio de Akaike	-413.2928
Criterio de Schwarz	-385.4811	Crit. de Hannan-Quinn	-402.0854

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
MA				
Raíz 1	-1.2032	0.4025	1.2688	0.4486
Raíz 2	-1.2032	-0.4025	1.2688	-0.4486
Raíz 3	1.3160	-0.4220	1.3820	-0.0494
Raíz 4	1.3160	0.4220	1.3820	0.0494
Raíz 5	0.5002	-1.0876	1.1972	-0.1814
Raíz 6	0.5002	1.0876	1.1972	0.1814
Raíz 7	-0.5083	-1.0534	1.1696	-0.3215
Raíz 8	-0.5083	1.0534	1.1696	0.3215

Se concluye que las observaciones desde agosto de 2008 a octubre de 2008 son valores atípicos que influyen en la serie (atip1), y que a partir de abril de 2009 tiene lugar un cambio permanente en la serie (perm3).

Ahora que se controla por valores atípicos que influyen en la serie puede que haya otro modelo que se ajusta mejor que el MA(8). De hecho, en el MA(8) algunos de los retardos ya no son tan significativos o directamente han dejado de serlo.

Efectivamente, ahora un MA(1) se ajusta mejor:

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.00514120	0.00760636	0.6759	0.4991	
theta_1	0.167211	0.0598642	2.793	0.0052	***
d_atip1BAC	0.368116	0.0700108	5.258	<0.0001	***
d_perm3BAC	0.784605	0.0994057	7.893	<0.0001	***

Media de la vble. dep.	0.008420	D.T. de la vble. dep.	0.119089
media innovaciones	0.000020	D.T. innovaciones	0.100655
Log-verosimilitud	209.6159	Criterio de Akaike	-409.2318
Criterio de Schwarz	-391.8495	Crit. de Hannan-Quinn	-402.2272

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
MA				
Raíz 1	-5.9805	0.0000	5.9805	0.5000

## ExxonMobil Corporation

Estadísticos descriptivos de los residuos del ruido blanco:

Estadísticos principales, usando las observaciones 2000:01 - 2019:12 para la variable uhatXOM (239 observaciones válidas)			
Media	Mediana	Mínimo	Máximo
1.4444e-018	-0.0010708	-0.16422	0.20785
Desv. Típica.	C.V.	Asimetría	Exc. de curtosis
0.050937	indefinido	-0.094901	1.1290
Porc. 5%	Porc. 95%	Rango IQ	Observaciones ausentes
-0.089859	0.080118	0.063524	1

La normalización que se hace es  $\text{ResiduosEstandarizados} = (r - (1.4444e-018))/0.050937$  siendo r los residuos (uhatXOM).

Solo hay un valor que se podría considerar muy alejado de la media:

(2005:03) Marzo de 2005: 4'165431

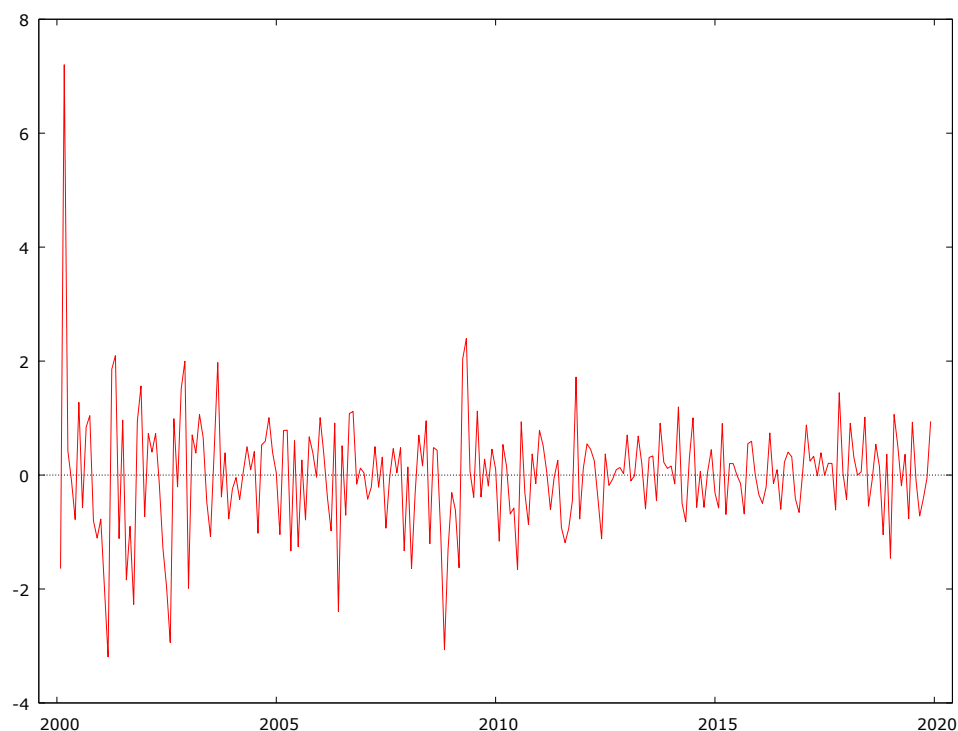
Pero no se ha podido explicar a qué se debe este valor, así que no se considera.

### Adobe Systems

Estadísticos descriptivos de los residuos del ARMA(2,2):

Estadísticos principales, usando las observaciones 2000:01 - 2019:12 para la variable uhatADBE (239 observaciones válidas)			
Media	Mediana	Mínimo	Máximo
3.2346e-005	0.0066083	-0.36539	0.82421
Desv. Típica.	C.V.	Asimetría	Exc. de curtosis
0.11446	3538.6	1.1521	10.992
Porc. 5%	Porc. 95%	Rango IQ	Observaciones ausentes
-0.18772	0.14601	0.12212	1

La normalización que se hace es  $\text{ResiduosEstandarizados} = (r - (0.000032346))/0.11446$  siendo r los residuos (uhatADBE).



Se consideran los siguientes valores como efectos puntuales, temporales y permanentes.

(2000:03) Marzo del 2000: 7.082894

(2001:03) Marzo del 2001: -3.240355

(2002:08) Agosto del 2002: -3.130363

(2008:11) Noviembre del 2008: -3.207964

Todos influyen en la serie: la observación de marzo del 2000 y la de noviembre de 2008 tienen efectos puntuales, y de marzo de 2001 a agosto de 2002 hay un efecto temporal.

El modelo ARMA(2,2) con estas variables:

	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.0181091	0.00423342	4.278	<0.0001	***
phi_2	0.577442	0.133264	4.333	<0.0001	***
theta_2	-0.740815	0.103905	-7.130	<0.0001	***
d_atip0ADBE	0.273582	0.0863890	3.167	0.0015	***
d_atip1ADBE	0.250225	0.0851246	2.940	0.0033	***
d_atip2ADBE	-0.214280	0.0737648	-2.905	0.0037	***

Media de la vble. dep.	0.018692	D.T. de la vble. dep.	0.115580
media innovaciones	0.000696	D.T. innovaciones	0.105254
Log-verosimilitud	198.8687	Criterio de Akaike	-383.7375
Criterio de Schwarz	-359.4022	Crit. de Hannan-Quinn	-373.9310

	<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Frecuencia</i>
AR				
Raíz 1	-1.3160	0.0000	1.3160	0.5000
Raíz 2	1.3160	0.0000	1.3160	0.0000
MA				
Raíz 1	-1.1618	0.0000	1.1618	0.5000
Raíz 2	1.1618	0.0000	1.1618	0.0000

Los primeros retardos no son significativos, así que se han eliminado.

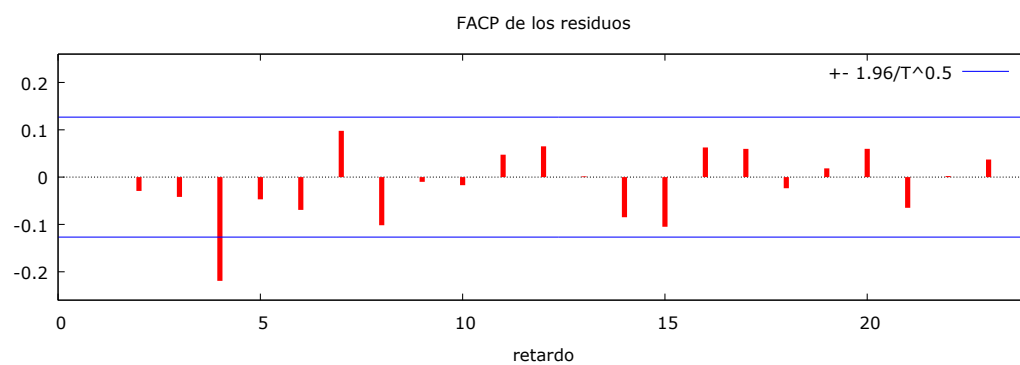
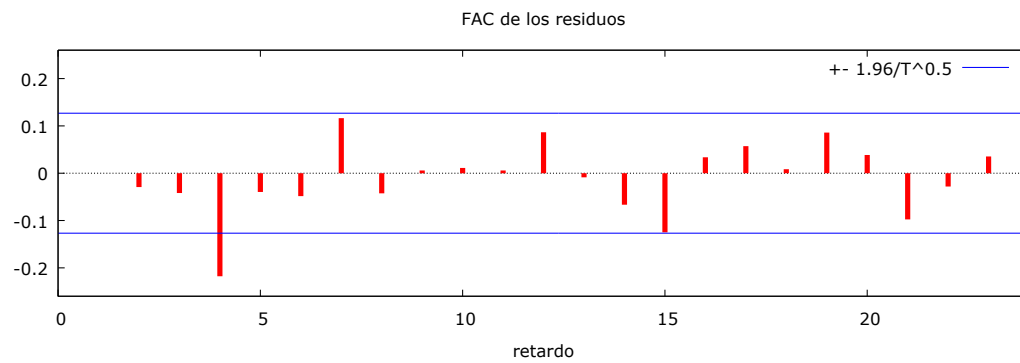
En la sección anterior se había elegido este modelo ARMA(2,2) aunque un ruido blanco tenía algunos criterios mejores. Es interesante comprobar si el ruido blanco con los valores atípicos sería mejor ahora:

	<i>Coeficiente</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>	
const	0.0186919	0.00699208	2.673	0.0075	***
d_atip0ADBE	0.228992	0.0882591	2.595	0.0095	***
d_atip1ADBE	0.265044	0.0882591	3.003	0.0027	***
d_atip2ADBE	-0.182724	0.0764346	-2.391	0.0168	**

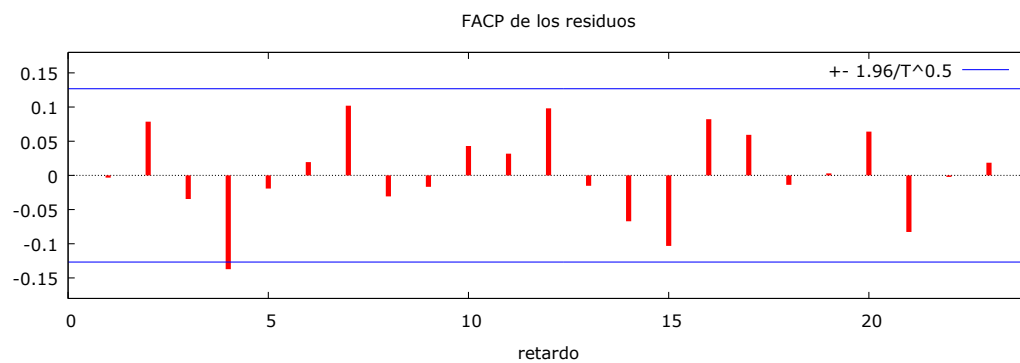
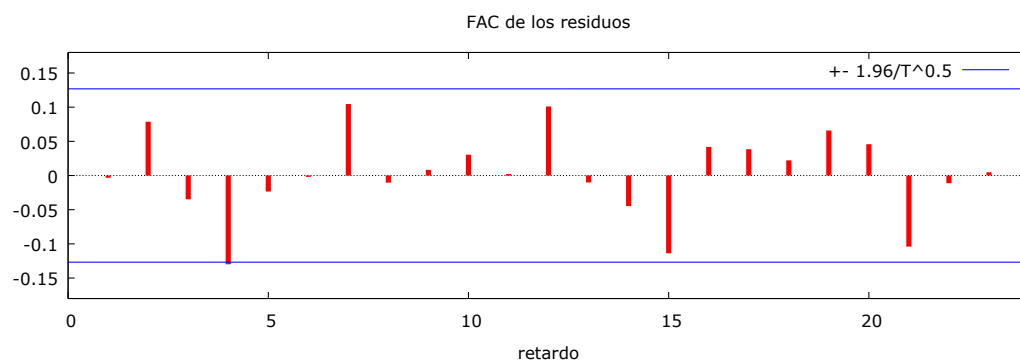
Media de la vble. dep.	0.018692	D.T. de la vble. dep.	0.115580
media innovaciones	0.000000	D.T. innovaciones	0.108095
Log-verosimilitud	194.6049	Criterio de Akaike	-379.2097
Criterio de Schwarz	-361.8274	Crit. de Hannan-Quinn	-372.2051

Los tres criterios son muy similares. Pero el correlograma de los residuos del ARMA(2,2) es mejor que el del ruido blanco.

Este es el del ruido blanco con los valores atípicos:



Y este es el del modelo ARMA(2,2):



Por eso el modelo definitivo elegido es el ARMA(2,2).



## Cartera equiponderada

Estadísticos descriptivos de los residuos del ruido blanco:

Estadísticos principales, usando las observaciones 2000:01 - 2019:12 para la variable uhatCartera (239 observaciones válidas)			
Media	Mediana	Mínimo	Máximo
2.5549e-018	0.0039624	-0.18650	0.12037
Desv. Típica.	C.V.	Asimetría	Exc. de curtosis
0.051086	indefinido	-0.64803	1.0334
Porc. 5%	Porc. 95%	Rango IQ	Observaciones ausentes
-0.10148	0.079047	0.058825	1

La normalización que se hace es  $\text{ResiduosEstandarizados} = (r - (2.5549e-018)) / 0.051086$  siendo  $r$  los residuos (uhatCartera).

Solo hay un valor que se podría considerar muy alejado de la media:

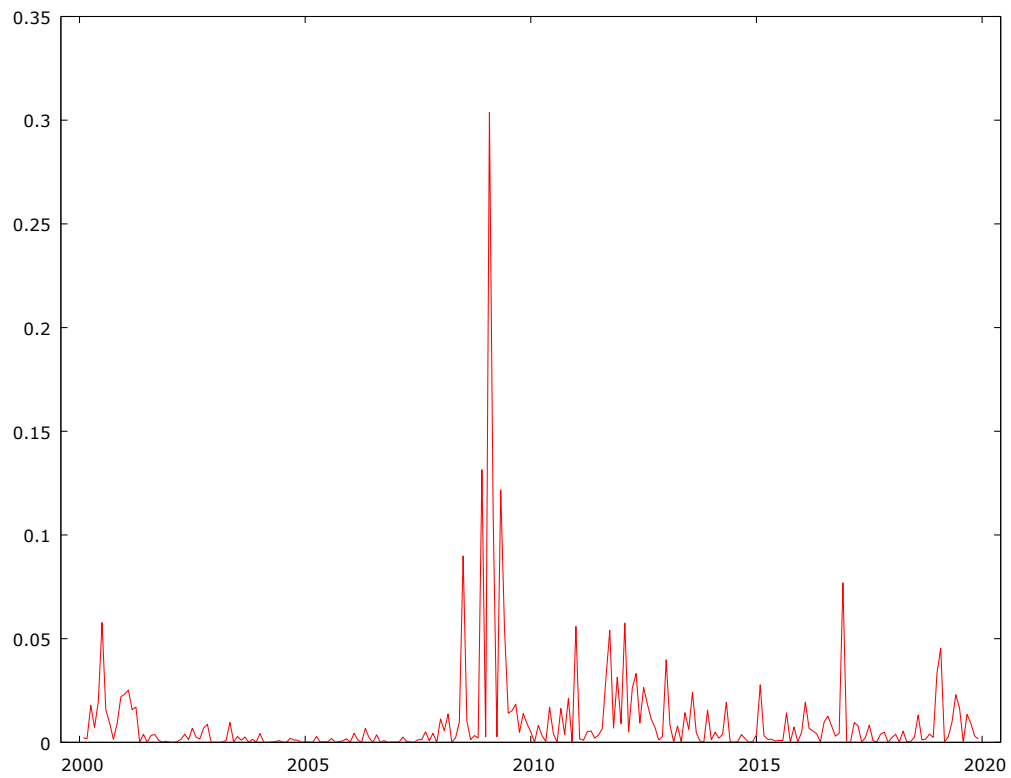
(2008:11) Noviembre de 2008: -3.650804

Este valor coincide con uno de los valores atípicos de Adobe Systems y en esta serie también produce un cambio permanente. La serie sigue siendo un ruido blanco.

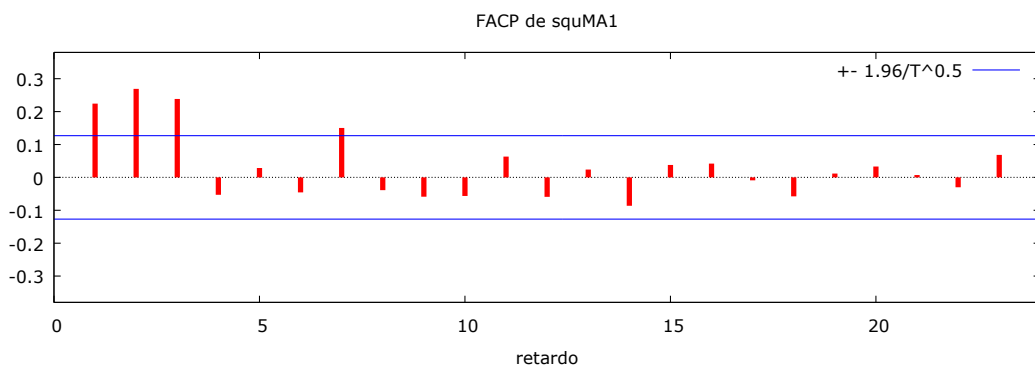
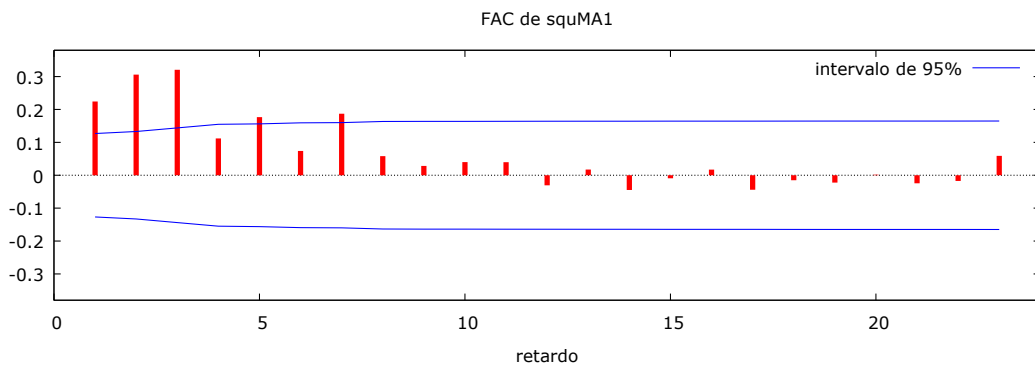
## 8.4. Volatilidad

### Bank of America

El gráfico de los residuos al cuadrado del modelo MA(1) es el siguiente:



Se puede ver el correlograma de estos residuos para saber hasta qué orden son significativos:



Sabiendo que hasta el séptimo son significativos, se realiza un contraste ARCH con 7 retardos.

Contraste de ARCH de orden 7

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p	
alpha(0)	0.00373219	0.00189351	1.971	0.0499	**
alpha(1)	0.119266	0.0660769	1.805	0.0724	*
alpha(2)	0.228125	0.0659265	3.460	0.0006	***
alpha(3)	0.252472	0.0676622	3.731	0.0002	***
alpha(4)	-0.0784354	0.0694872	-1.129	0.2602	
alpha(5)	0.00130215	0.0676609	0.01925	0.9847	
alpha(6)	-0.0633646	0.0659292	-0.9611	0.3375	
alpha(7)	0.148810	0.0655911	2.269	0.0242	**

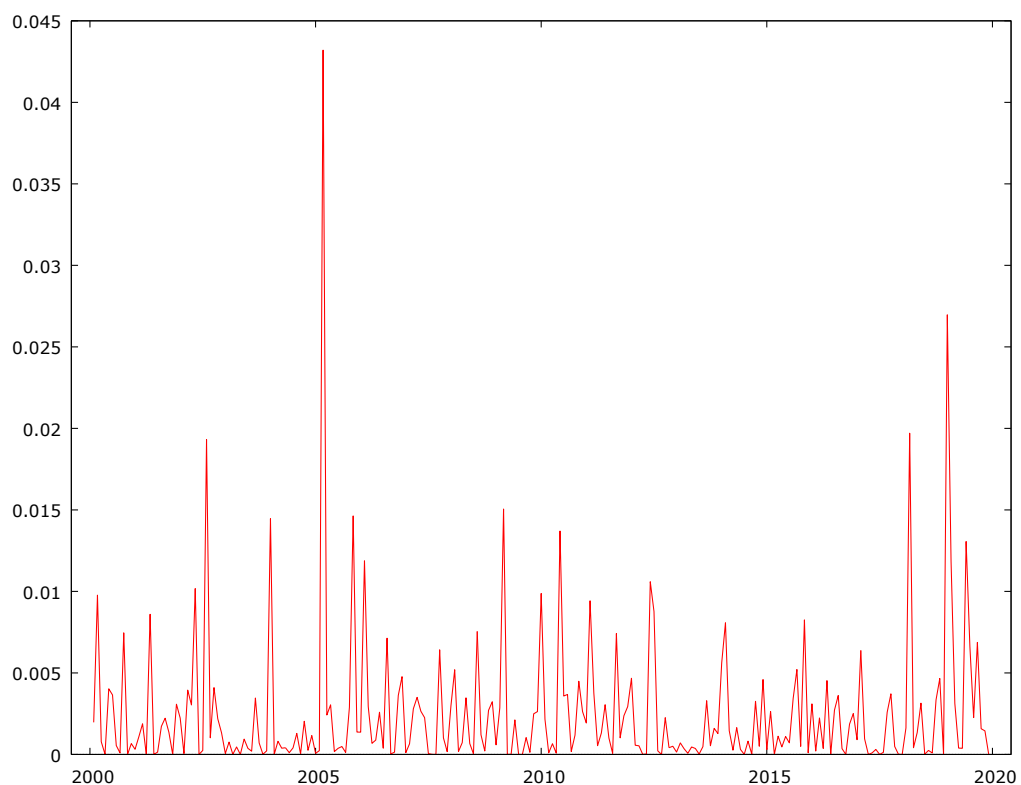
Hipótesis nula: no hay efecto ARCH

Estadístico de contraste: LM = 45.0305

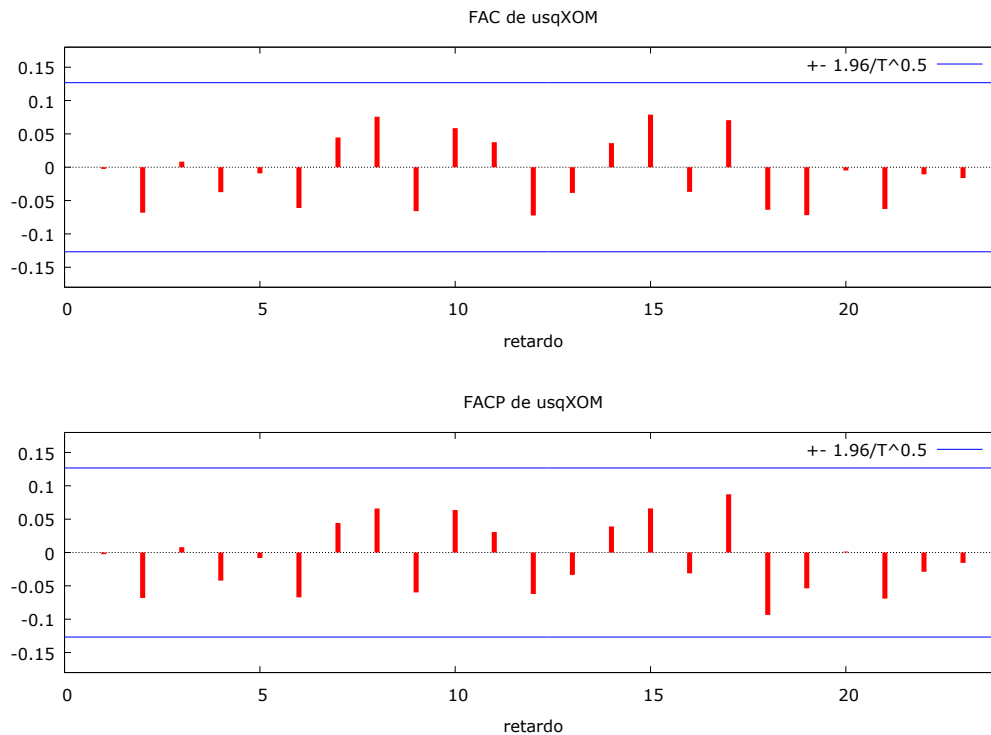
con valor p =  $P(\text{Chi-cuadrado}(7) > 45.0305) = 1.34908e-007$

## ExxonMobil Corporation

El gráfico de los residuos al cuadrado es:



Al ver el correlograma de los residuos al cuadrado ninguno es significativo.



Efectivamente, si se hace un contraste con algunos retardos no se rechaza la hipótesis nula y por tanto no hay volatilidad:

Contraste de ARCH de orden 12

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p	
-----					
alpha(0)	0.00281009	0.000726736	3.867	0.0001	***
alpha(1)	0.0131371	0.0682418	0.1925	0.8475	
alpha(2)	-0.0600677	0.0681849	-0.8810	0.3793	
alpha(3)	-0.00397184	0.0680435	-0.05837	0.9535	
alpha(4)	-0.0430658	0.0678385	-0.6348	0.5262	
alpha(5)	0.000868311	0.0677627	0.01281	0.9898	
alpha(6)	-0.0607916	0.0679804	-0.8943	0.3722	
alpha(7)	0.0311876	0.0688125	0.4532	0.6508	
alpha(8)	0.0729437	0.0686601	1.062	0.2893	
alpha(9)	-0.0604683	0.0687333	-0.8798	0.3800	
alpha(10)	0.0657133	0.0688959	0.9538	0.3413	
alpha(11)	0.0294654	0.0693200	0.4251	0.6712	
alpha(12)	-0.0717678	0.0745829	-0.9623	0.3370	

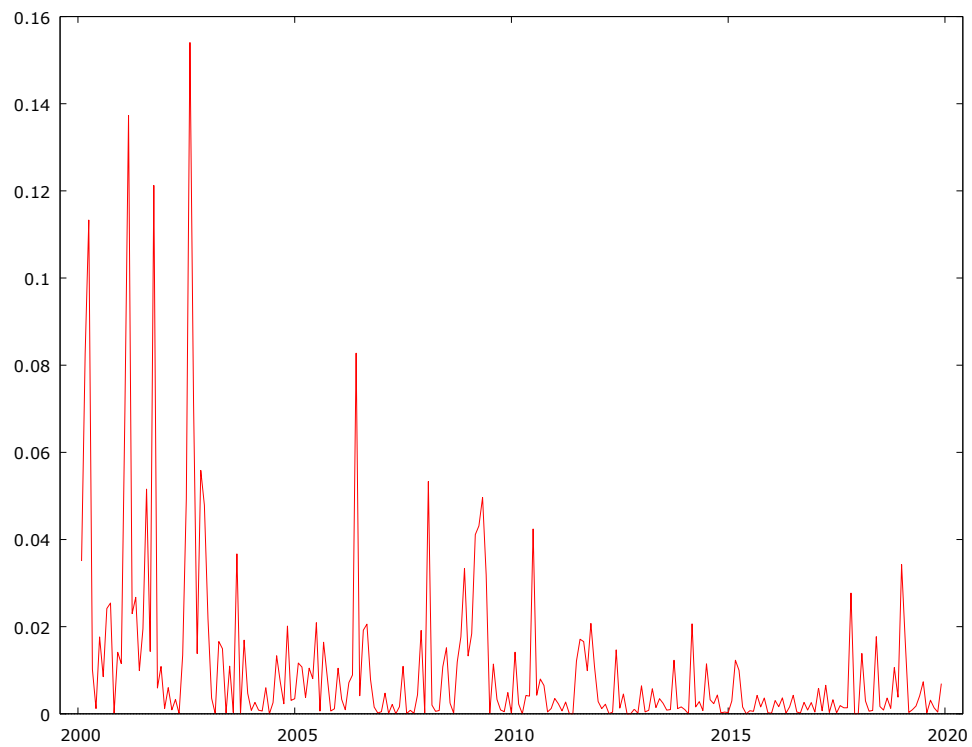
Hipótesis nula: no hay efecto ARCH

Estadístico de contraste: LM = 6.97736

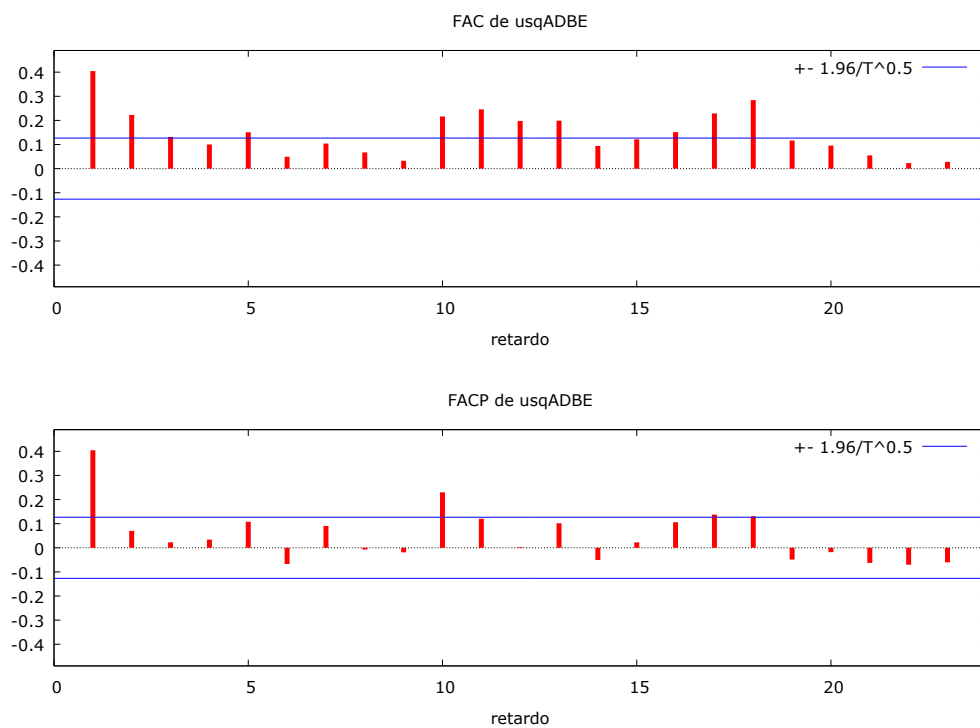
con valor p =  $P(\text{Chi-cuadrado}(12) > 6.97736) = 0.859106$

## Adobe Systems

El gráfico de los residuos al cuadrado es:



El correlograma de los residuos al cuadrado es:



Se realiza un contraste ARCH con 18 retardos:

Contraste de ARCH de orden 18

	Coefficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p	
alpha(0)	0.00157532	0.00156926	1.004	0.3166	
alpha(1)	0.257381	0.0690869	3.725	0.0003	***
alpha(2)	0.119441	0.0709833	1.683	0.0940	*
alpha(3)	-0.0463937	0.0710145	-0.6533	0.5143	
alpha(4)	0.0838376	0.0706514	1.187	0.2368	
alpha(5)	0.0190526	0.0635912	0.2996	0.7648	
alpha(6)	-0.187609	0.0632546	-2.966	0.0034	***
alpha(7)	0.100565	0.0643999	1.562	0.1200	
alpha(8)	-0.0362095	0.0642258	-0.5638	0.5735	
alpha(9)	-0.0643646	0.0625823	-1.028	0.3050	
alpha(10)	0.197929	0.0623350	3.175	0.0017	***
alpha(11)	-0.0367835	0.0635218	-0.5791	0.5632	
alpha(12)	-0.0552564	0.0633889	-0.8717	0.3844	
alpha(13)	0.148672	0.0629861	2.360	0.0192	**
alpha(14)	-0.0620371	0.0636166	-0.9752	0.3306	
alpha(15)	-0.0275287	0.0624686	-0.4407	0.6599	
alpha(16)	0.0900931	0.0603413	1.493	0.1370	
alpha(17)	0.0854661	0.0599294	1.426	0.1554	
alpha(18)	0.154871	0.0573922	2.698	0.0076	***

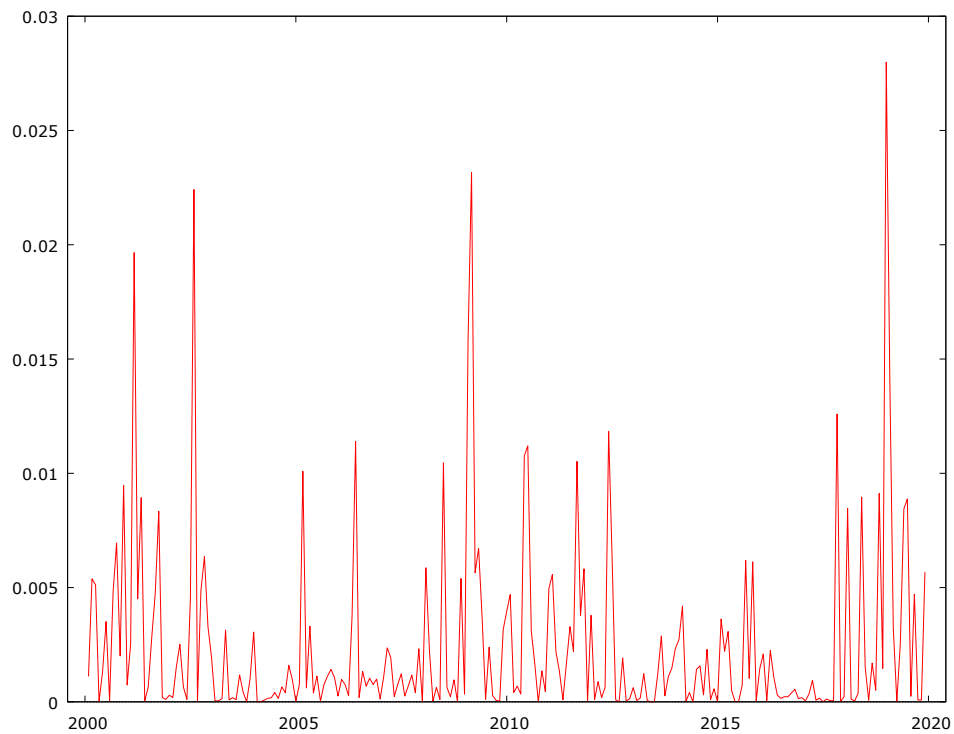
Hipótesis nula: no hay efecto ARCH

Estadístico de contraste: LM = 68.175

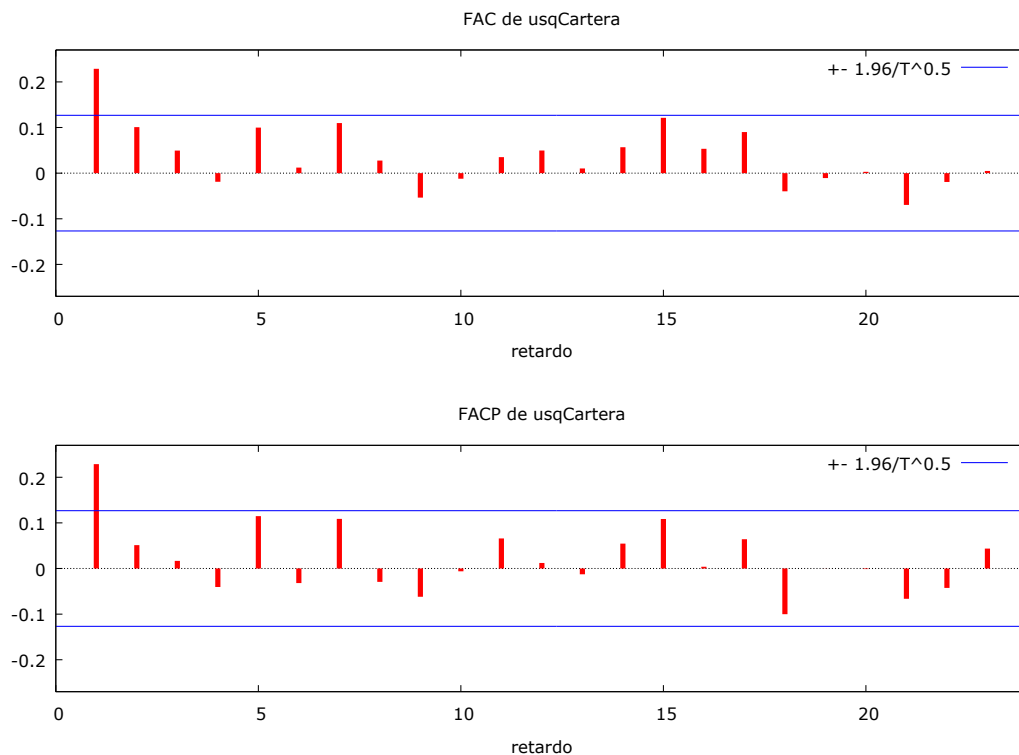
con valor p =  $P(\text{Chi-cuadrado}(18) > 68.175) = 9.17806e-008$

## Cartera equiponderada

El gráfico de los residuos al cuadrado es:



Viendo su correlograma para saber el orden de retardos que debe considerarse:



Se realiza un contraste ARCH con 1 retardo:

Contraste de ARCH de orden 1

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
alpha(0)	0.00189883	0.000299755	6.335	1.19e-09 ***
alpha(1)	0.229379	0.0634328	3.616	0.0004 ***

Hipótesis nula: no hay efecto ARCH

Estadístico de contraste: LM = 12.4946

con valor p = P(Chi-cuadrado(1) > 12.4946) = 0.000408123

## 8.5. Cartera de mínima varianza global

El problema de optimización para hallar la cartera de mínima varianza global:

$$\min_{w_1 w_2 w_3} \sigma_c^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2$$

$$s.a. \bar{\mu}_c = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 + w_3 \mu_3$$

Se trata de un problema de optimización con una restricción, por lo que se usa la ecuación de Lagrange para resolverlo. Se calculan las condiciones de primer orden y se igualan a cero, quedando un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas ( $w_1, w_2, w_3$  y  $\lambda$ ):

$$l = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2 + \lambda (\bar{\mu}_c - w_1 \mu_1 - w_2 \mu_2 - w_3 \mu_3)$$

$$\frac{dl}{dw_1} = 2w_1 \sigma_1^2 - \lambda \mu_1 = 0$$

$$\frac{dl}{dw_2} = 2w_2 \sigma_2^2 - \lambda \mu_2 = 0$$

$$\frac{dl}{dw_3} = 2w_3 \sigma_3^2 - \lambda \mu_3 = 0$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = \bar{\mu}_c - w_1 \mu_1 - w_2 \mu_2 - w_3 \mu_3 = 0$$

Las soluciones de este sistema son las ponderaciones óptimas:



$$w_1^* = \frac{\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}}{\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\sigma_3^2}} \bar{\mu}_c$$

$$w_2^* = \frac{\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}}{\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\sigma_3^2}} \bar{\mu}_c$$

$$w_3^* = \frac{\frac{\mu_3}{\sigma_3^2}}{\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\sigma_3^2}} \bar{\mu}_c$$

Para calcular la cartera de mínima varianza global asumiendo que las medias y las varianzas con constantes se han utilizado las medias y las varianzas marginales de las series:

$$\hat{\mu}_1 = 0'0084, \quad \hat{\sigma}_1 = 0'1191$$

$$\hat{\mu}_2 = 0'0036, \quad \hat{\sigma}_2 = 0'0509$$

$$\hat{\mu}_3 = 0'0187, \quad \hat{\sigma}_3 = 0'1156$$

$$\bar{\mu}_c = \frac{(0'0084 + 0'0036 + 0'0187)}{3} = 0'0103$$

El rendimiento medio deseado se ha fijado al rendimiento medio que tendría una cartera equiponderada.

## 9. Bibliografía

Bollen, B. UNE Business School Occasional Papers, 2014-01: *What should the value of  $\lambda$  be in the exponentially weighted moving average volatility model?*

Bollerslev, T. (1986), *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of econometrics, 31(3), 307-327, <http://www.u.arizona.edu/~rlo/readings/278762.pdf> Consultado 3 de Junio de 2020.

Box, G.E.P., Jenkins, G.M. and Reinsel, G. (1994), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 3ª ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Denia, A. (2019), Apuntes de Técnicas de Predicción en Economía.

Engle, R. (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica, 50(4), 987-1007, JSTOR, [www.jstor.org/stable/1912773](http://www.jstor.org/stable/1912773). Consultado 3 de Junio de 2020.

Executive Office of the President of the U.S., Office of Management and Budget, (2012), *Budget of the United States Government: Analytical perspectives*.

Glosten, L., Jagannathan, R., and Runkle, D. (1993), *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*. The Journal of Finance, 48(5), 1779-1801, JSTOR, [www.jstor.org/stable/2329067](http://www.jstor.org/stable/2329067). Consultado 3 de Junio de 2020.

Gonzalez-Rivera, G. (2016), *Forecasting for Economics and Business*, Routledge, New York, NY.

Nelson, D. (1991), *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*. Econometrica, 59(2), 347-370, JSTOR, [www.jstor.org/stable/2938260](http://www.jstor.org/stable/2938260). Consultado 3 de Junio de 2020.

Odekon, M., (2015), *Booms and Busts: An Encyclopedia of Economic History from the First Stock Market Crash of 1792 to the Current Global Economic Crisis*, Routledge, New York, NY.

Peña, D. (2017), *Análisis de series temporales*, 2ª ed., Alianza Editorial, Madrid.